56. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 7
Lösungen

560711 Lösung *6 Punkte*

Die Anzahl der Schüler sei x.

Wenn jeder Schüler 75 Euro einzahlt, dann erhält man $75 \cdot x$ Euro als eingezahlten Geldbetrag. Die Gesamtkosten betragen nach dem Aufgabentext folglich $(75 \cdot x + 440)$ Euro, da 440 Euro noch fehlen.

Wenn jeder Schüler 80 Euro einzahlt, dann erhält man $80 \cdot x$ Euro als eingezahlten Geldbetrag. Die Gesamtkosten betragen nach dem Aufgabentext folglich $(80 \cdot x - 440)$ Euro, da es 440 Euro zu viel sind.

Durch Gleichsetzen folgt $75 \cdot x + 440 = 80 \cdot x - 440$ und hieraus $5 \cdot x = 880$, also $x = 176$.

Am Wandervogel-Gymnasium besuchen daher 176 Schüler eine siebte Klasse.

560712 Lösung *10 Punkte*

Wir überlegen zuerst, aus wie vielen kleinen Würfeln ein Würfel W mit größtmöglichem Volumen zusammengesetzt werden muss, wenn m kleine Würfel zur Verfügung stehen. Da zum Aufbau eines Würfels in Länge, Breite und Höhe die gleiche Anzahl an kleinen Würfeln benötigt werden, besteht ein solcher Würfel W aus n^3 kleinen Würfeln, wobei n die größte natürliche Zahl mit $n^3 \leq m$ ist.

Für W_1 haben wir 100 kleine Würfel zur Verfügung. Da 4 die größte natürliche Zahl ist, deren Kubikzahl kleiner oder gleich 100 ist, werden für W_1 genau 4^3 kleine Würfel verwendet. Nach dem Zusammensetzen des Würfels W_1 sind noch $(100 - 4^3 = 100 - 64 =)$ 36 kleine Würfel übrig, die für W_2 genutzt werden können.

Da 3 die größte natürliche Zahl ist, deren Kubikzahl kleiner oder gleich 36 ist, werden für W_2 genau 3^3 kleine Würfel verwendet. Nach dem Zusammensetzen des Würfels W_2 sind noch $(36 - 3^3 = 36 - 27 =)$ 9 kleine Würfel übrig, die für W_3 genutzt werden können.

Da 2 die größte natürliche Zahl ist, deren Kubikzahl kleiner oder gleich 9 ist, werden für W_3 genau 2^3 kleine Würfel verwendet. Nach dem Zusammensetzen des Würfels W_3 ist noch $(9 - 2^3 = 9 - 8 =)$ 1 kleiner Würfel übrig.

560713 Lösung *10 Punkte*

Teil b) Wir nummerieren die von Susanne gestellten Bedingungen:

(1) Unter den sechs Ziffern der Zahl kommt jede der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und 6 genau einmal vor.

(2) Betrachtet man nur die von links ersten beiden Ziffern, so ist diese zweistellige Zahl durch 2 teilbar.

(3) Betrachtet man nur die von links ersten drei Ziffern, so ist diese dreistellige Zahl durch 3 teilbar.

(4) Betrachtet man nur die von links ersten vier Ziffern, so ist diese vierstellige Zahl durch 4 teilbar.

(5) Betrachtet man nur die von links ersten fünf Ziffern, so ist diese fünfstellige Zahl durch 5 teilbar.

(6) Die sechsstellige Zahl selbst ist durch 6 teilbar.

I. Zur Herleitung aller Zahlen, welche die gestellten Bedingungen erfüllen, erstellen wir eine Tabelle. Einer Spalte entspricht dabei die entsprechende Position in der sechsstelligen Zahl. In den Zeilen der Tabelle tragen wir ein, nach welchem Arbeitsschritt welche Ziffern für die einzelnen Positionen noch zur Verfügung stehen. Wenn die zu einer Position gehörende Ziffer eindeutig festgelegt ist, wird sie eingerahmt.

Schritt \ Position	1	2	3	4	5	6
[1]					$\boxed{5}$	
[2]		2, 4, 6		2, 4, 6		2, 4, 6
[3]	1, 3		1, 3			
[4]		$\boxed{2}$				
[5]				4, 6		4, 6
[6]				$\boxed{6}$		
[7]						$\boxed{4}$

[1] Aus den Bedingungen (1) und (5) sowie nach der Teilbarkeitsregel für die Zahl 5 folgt, dass nur die Ziffer 5 auf Position 5 eingetragen werden kann.

[2] Aus den Bedingungen (1), (2), (4) und (6) sowie nach den Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 2, 4 und 6 folgt, dass die Positionen 2, 4 und 6 nur mit den geraden Ziffern 2, 4 und 6 belegt werden können.

[3] Aus Bedingung (1) und nach den Schritten [1] und [2] folgt, dass nur die Ziffern 1 und 3 an den Positionen 1 und 3 stehen können.

[4] Aus Bedingung (3), nach der Teilbarkeitsregel für die 3 und nach den Schritten [2] und [3] folgt, dass nur die Ziffer 2 an zweiter Position stehen kann, da von den Zahlen $(1+3+2=)$ 6, $(1+3+4=)$ 8 und $(1+3+6=)$ 10 nur 6 durch 3 teilbar ist.

[5] Aus Bedingung (1) und nach den Schritten [2] und [4] folgt, dass nur die Ziffern 4 und 6 an den Positionen 4 und 6 stehen können.

[6] Aus Bedingung (4), nach der Teilbarkeitsregel für die Zahl 4 und nach den Schritten [3] und [5] folgt, dass nur die Ziffer 6 an vierter Position stehen kann, da von den Zahlen 14, 16, 34, 36 nur 16 und 36 durch 4 teilbar sind.

[7] Aus Bedingung (1) und nach den Schritten [5] und [6] folgt, dass die Ziffer 4 an der sechsten Position stehen muss.

Wenn eine Zahl alle Bedingungen von Susanne erfüllt, dann kann sie also nur 123 654 oder 321 654 sein.

II. Die Probe am Aufgabentext zeigt, dass die Zahlen 123 654 und 321 654 tatsächlich alle Bedingungen von Susanne erfüllen.

Aus I. und II. folgt: Die Zahlen 123 654 und 321 654 sind die einzigen Zahlen, die alle Bedingungen von Susanne erfüllen.

Teil a) Wie zuvor gezeigt, erfüllt zum Beispiel 123 654 alle Bedingungen der Aufgabe.

Lösungsvariante zu Teil b) I. Es sei z eine Zahl, welche die von Susanne gestellten Bedingungen erfüllt. Dann gibt es Zahlen a, b, c, d, e und f mit $z = 10^5 \cdot a + 10^4 \cdot b + 10^3 \cdot c + 10^2 \cdot d + 10 \cdot e + f$ und die Zahlen a, b, c, d, e und f erfüllen die folgenden Bedingungen:

(1) Unter den Zahlen a, b, c, d, e und f kommt jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 genau einmal vor.
(2) $2 \mid 10 \cdot a + b$.
(3) $3 \mid 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$.
(4) $4 \mid 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$.
(5) $5 \mid 10^4 \cdot a + 10^3 \cdot b + 10^2 \cdot c + 10 \cdot d + e$.
(6) $6 \mid 10^5 \cdot a + 10^4 \cdot b + 10^3 \cdot c + 10^2 \cdot d + 10 \cdot e + f$.

Aus den Bedingungen (1) und (5) und nach der Teilbarkeitsregel für die Zahl 5 folgt

$$e = 5\,.$$

Da jede durch 4 oder 6 teilbare Zahl eine gerade Zahl ist, folgt aus den Bedingungen (2), (4) und (6) und nach der Teilbarkeitsregel für die Zahl 2, dass b, d und f gerade Zahlen sein müssen. Hieraus und aus Bedingung (1) folgt daher, dass b, d und f nur 2, 4 und 6 sein können und dass a und c nur 1 und 3 sein können.

Aus der Bedingung (3) und nach der Teilbarkeitsregel für die Zahl 3 muss $a + b + c$ durch 3 teilbar sein. Da a und c nur 1 und 3 sein können, gilt $a + c = 4$. Da b nur eine der Ziffern 2, 4 oder 6 sein kann, ist $a + b + c$ nur für $b = 2$ durch 3 teilbar. Daher folgt

$$b = 2$$

und für d und f verbleiben nur noch 4 und 6.

Aus der Bedingung (4) und nach der Teilbarkeitsregel für die Zahl 4 folgt, dass die Zahl $10 \cdot c + d$ durch 4 teilbar ist. Da c nur 1 oder 3 und d nur 4 oder 6 sein kann, kann $10 \cdot c + d$ nur eine der Zahlen 14, 16, 34, 36 sein, von denen nur 16 und 36 durch 4 teilbar sind. Daher folgt

$$d = 6\,.$$

Da f nur eine der Zahlen 4 und 6 sein kann, aber nach Bedingung (1) verschieden von d ist, folgt

$$f = 4\,.$$

Es verbleibt nur noch $a = 1$ und $c = 3$ oder $a = 3$ und $c = 1$.

Wenn eine Zahl die von Susanne gestellten Bedingungen erfüllt, kann es also nur eine der Zahlen 123 654 und 321 654 sein.

II. Die Probe am Aufgabentext zeigt, dass die Zahlen 123 654 und 321 654 tatsächlich alle Bedingungen von Susanne erfüllen.

Aus I. und II. folgt: Die Zahlen 123 654 und 321 654 sind die einzigen Zahlen, die alle Bedingungen von Susanne erfüllen.

560714 Lösung *10 Punkte*

Wir nummerieren die Plätze der Songs von Platz 1 (beliebtester Song) bis Platz 20 (unbeliebtester Song).

I. Zuerst zeigen wir, dass es unter den Einschränkungen der Aufgabe einen letzten Ausstrahlungstag gibt. Da sich jeden Tag die Reihenfolge ändert, muss jeden Tag ein Song seinen Platz ändern, also auf- oder absteigen. Da für einen aufsteigenden Song mindestens einer absteigen muss, muss jeden Tag ein Song absteigen. Jeder Song kann höchstens 19-mal absteigen, da es nur 20 Plätze gibt und er nicht wieder aufsteigen kann, nachdem er einmal abgestiegen ist. Bei 20 Songs können daher die „Top Twenty" unter den Einschränkungen der Aufgabe höchstens $(1 + 20 \cdot 19 =)$ 381 Tage gespielt werden.

Wir betrachten eine Liste der „Top Twenty" am letzten Ausstrahlungstag und schauen uns den Song auf Platz n mit $n \in \{1, 2, \ldots, 20\}$ an. Dieser kann bestenfalls von Platz 1 abgestiegen sein. Da er je Abstieg um mindestens einen Platz absteigt, kann er höchstens $n - 1$ Tage abgestiegen sein. Betrachten wir nun alle Songs von Platz 1 bis 20, so kann nur an

$$(1-1) + (2-1) + \cdots + (19-1) + (20-1)$$

Tagen einer von ihnen absteigen. Wegen

$$(1-1) + (2-1) + \cdots + (19-1) + (20-1) = 0 + 1 + \cdots + 18 + 19 = \frac{1}{2} \cdot 19 \cdot 20 = 190$$

sind dies 190 Tage, zusammen mit dem ersten Tag also 191 Spieltage. Die „Top Twenty" können unter den Einschränkungen der Aufgabe also höchstens 191 Tage gespielt werden.

II. Wir zeigen nun, dass es tatsächlich möglich ist, die „Top Twenty" unter den Einschränkungen dieser Aufgabe mindestens 191 Tage zu spielen. Dazu werden die Songs entsprechend ihrer Platzzahl am ersten Tag mit S_1 bis S_{20} bezeichnet.

Der Song S_1 steigt an den nächsten 19 aufeinanderfolgenden Tagen jeweils um einen Platz ab, bis er bei Platz 20 anlangt. Die anderen Songs steigen dabei jeweils genau einmal einen Platz auf.

Der Song S_2, der nun auf Platz 1 ist, steigt dann an den nächsten 18 aufeinanderfolgenden Tagen jeweils um einen Platz ab, bis er bei Platz 19 anlangt. Die Songs S_3 bis S_{20} steigen dabei jeweils genau einmal um einen Platz auf.

Dies geht so weiter, bis schließlich Song S_{19} um genau einen Platz von Platz 1 auf Platz 2 absteigt und dabei Song S_{20} auf Platz 1 aufsteigt.

Auf diese Weise steigt an $(19 + 18 + 17 + \cdots + 1 =)$ 190 Tagen jeweils genau ein Song ab, wobei kein Song jemals wieder aufsteigt, nachdem er einmal abgestiegen ist. Zusammen mit dem ersten Tag können die „Top Twenty" unter den Einschränkungen dieser Aufgabe also mindestens 191 Tage gespielt werden.

Aus I. und II. folgt, dass 191 die größtmögliche Anzahl an Tagen ist, an denen es möglich ist, die „Top Twenty" derart abzuspielen, dass kein Song hinzukommt und keiner ausscheidet, sich jeden Tag die Reihenfolge ändert und kein Song jemals wieder aufsteigt, nachdem er einmal abgestiegen ist.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 560711 *Insgesamt: 6 Punkte*

Prinzipiell geeigneter Lösungsansatz .... 1 Punkt
Vollständige und korrekte Herleitung der Anzahl der Schüler .... 4 Punkte
Korrektes Ergebnis .... 1 Punkt

Aufgabe 560712 *Insgesamt: 10 Punkte*

Zusammensetzung des Würfels W_1 und Anzahl der Restwürfel .... 4 Punkte
Zusammensetzung des Würfels W_2 und Anzahl der Restwürfel .... 3 Punkte
Zusammensetzung des Würfels W_3 und Anzahl der Restwürfel .... 3 Punkte

Aufgabe 560713 *Insgesamt: 10 Punkte*

Für eine Herleitung aller Lösungen mit Probe in Teil b) und kurzer Antwort zu Teil a):

Teil b) Herleitung aller Lösungen .... 6 Punkte
Probe .... 1 Punkt
Korrektes Ergebnis .... 2 Punkte
Teil a) Angabe einer der beiden Zahlen .... 1 Punkt

Für eine Lösung ohne ausreichende Begründung, dass alle Zahlen gefunden wurden:

Teil a) Eine Zahl mit Probe .... 3 Punkte
Teil b) Eine weitere Zahl mit Probe .... 2 Punkte
Prinzipiell geeignete Schritte zur Herleitung aller Zahlen .... 3 Punkte

Aufgabe 560714 *Insgesamt: 10 Punkte*

Beweis, dass die „Top Twenty“ nicht länger als 191 Tage gespielt werden können. .... 5 Punkte
Beweis (durch Beispiel), dass die „Top Twenty“ mindestens 191 Tage gespielt werden können. .... 3 Punkte
Korrektes Ergebnis .... 2 Punkte