56. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 8
Lösungen

© 2016 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

560811 Lösung *10 Punkte*

Da die Laufstrecke eine Länge von 800 m hat, muss Bernd bei einer Vorgabe von 30 m noch 770 m laufen. Mit t_1 bezeichnen wir die Zeit, die Bernd für diese Strecke benötigt. Für seine Geschwindigkeit v_B gilt dann

$$v_B = \frac{770\,\mathrm{m}}{t_1}\,. \tag{1}$$

Bei einer Vorgabe von 50 m muss Bernd noch 750 m laufen. Mit t_2 bezeichnen wir die Zeit, die Bernd für diese Strecke benötigt. Für seine Geschwindigkeit v_B gilt dann auch

$$v_B = \frac{750\,\mathrm{m}}{t_2}\,, \tag{2}$$

da Bernd beide Male gleich schnell läuft. Aus (1) und (2) folgt

$$t_1 = \frac{77}{75} \cdot t_2\,. \tag{3}$$

Nach Aufgabenstellung sind $t_1 - 2\,\mathrm{s}$ und $t_2 + 1{,}2\,\mathrm{s}$ die Zeiten, die Anton für die Strecke von 800 m benötigt. Da Anton beide Male gleich schnell läuft, gilt

$$t_1 - 2\,\mathrm{s} = t_2 + 1{,}2\,\mathrm{s}$$

und daher

$$t_1 = t_2 + 3{,}2\,\mathrm{s}\,. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt $\frac{77}{75} \cdot t_2 = t_2 + 3{,}2\,\mathrm{s}$, $\frac{2}{75} \cdot t_2 = 3{,}2\,\mathrm{s}$, $t_2 = \frac{75}{2} \cdot 3{,}2\,\mathrm{s}$ und schließlich

$$t_2 = 120\,\mathrm{s}\,.$$

Hieraus und aus (2) folgt

$$v_B = \frac{750\,\mathrm{m}}{120\,\mathrm{s}} = 6{,}25\,\mathrm{m/s}\,.$$

Wegen $t_2 + 1{,}2\,\mathrm{s} = 121{,}2\,\mathrm{s}$ gilt für die Geschwindigkeit v_A von Anton

$$v_A = \frac{800\,\mathrm{m}}{121{,}2\,\mathrm{s}} \approx 6{,}60\,\mathrm{m/s}\,.$$

Die Geschwindigkeit von Anton beträgt etwa 6,60 m/s, die Geschwindigkeit von Bernd beträgt 6,25 m/s.

Lösungsvariante: Nach Aufgabenstellung kommt Bernd bei 50 Metern Vorgabe 1,2 Sekunden vor Anton, bei 30 Metern Vorgabe 2 Sekunden nach Anton an. Für $(50-30=)$ 20 Meter benötigt Bernd also $(1{,}2+2=)$ 3,2 Sekunden. Da er in beiden Fällen mit der gleichen, konstanten Geschwindigkeit läuft, ist $(20/3{,}2=)$ 6,25 Meter pro Sekunde seine Geschwindigkeit.

Da die Strecke 800 Meter lang ist, muss Bernd bei 50 Metern Vorgabe noch 750 Meter laufen. Hierfür benötigt er $(750/6{,}25 =)$ 120 Sekunden. Da Anton bei dieser Vorgabe 1,2 Sekunden nach Bernd ankommt, benötigt Anton 121,2 Sekunden für 800 Meter und läuft daher (auf zwei Dezimalstellen genau) mit $(800/121{,}2 \approx)$ 6,60 Metern pro Sekunde.

Die Geschwindigkeit von Anton beträgt etwa 6,60 Meter pro Sekunde, die Geschwindigkeit von Bernd beträgt 6,25 Meter pro Sekunde.

560812 Lösung *10 Punkte*

Zur Erfassung aller Möglichkeiten, in welchen Kasten Frank den Zettel mit der Zahl 1 gelegt hat, erstellen wir eine Tabelle: In den Tabellenkopf schreiben wir in Reihenfolge des Uhrzeigersinns die Nummern der Kästen. Dann schreiben wir zeilenweise darunter, welche Zahlen auf den Zetteln in den Kästen stehen, wobei wir die Zahl 1 zuerst in den Kasten mit der Nummer 1, dann in den im Uhrzeigersinn nächsten Kasten, also den mit der Nummer 3 legen und so weiter. Wir rahmen ein, wenn die Zahl auf dem Zettel mit der Nummer des Kastens übereinstimmt. Schließlich fügen wir eine Spalte an, in der wir diese Übereinstimmungen zählen.

Nr.	1	3	8	5	10	6	7	2	4	9	Anzahl der Übereinstimmungen
1	$\boxed{1}$	2	3	4	5	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	8	9	10	3
2	10	1	2	3	4	5	6	7	8	$\boxed{9}$	1
3	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	0
4	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	0
5	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	0
6	6	7	$\boxed{8}$	9	$\boxed{10}$	1	2	3	$\boxed{4}$	5	3
7	5	6	7	8	9	10	1	$\boxed{2}$	3	4	1
8	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	0
9	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	0
10	2	$\boxed{3}$	4	$\boxed{5}$	6	7	8	9	10	1	2

Wir beobachten nun:

- Bei zwei Verteilungen stimmen Kastennummer und die Zahl auf dem eingelegten Zettel genau dreimal überein (Belegnummern 1 und 6). Bei diesen Verteilungen ist also nicht entscheidbar, in welchem Kasten der Zettel mit der Zahl 7 liegt: im Kasten mit der Nummer 7 oder im Kasten mit der Nummer 3.
- Bei zwei Verteilungen stimmen Kastennummer und die Zahl auf dem eingelegten Zettel genau einmal überein (Belegnummern 2 und 7). Bei diesen Verteilungen ist also auch nicht entscheidbar, in welchem Kasten der Zettel mit der Zahl 7 liegt: im Kasten mit der Nummer 8 oder im Kasten mit der Nummer 2.
- Bei fünf Verteilungen stimmen Kastennummer und die Zahl auf dem eingelegten Zettel nirgends überein (Belegnummern 3, 4, 5, 8 und 9). Bei diesen Verteilungen ist also auch nicht entscheidbar, in welchem Kasten der Zettel mit der Zahl 7 liegt: im Kasten mit der Nummer 10, 5, 1, 9 oder 4.
- Bei nur einer einzigen Anordnung stimmen Kastennummer und die Zahl auf dem eingelegten Zettel genau zweimal überein (Belegnummer 10). Nur hier lässt sich eindeutig

entscheiden, in welchem Kasten der Zettel mit der Zahl 7 liegt: nämlich im Kasten mit der Nummer 6.

Da Sven aus der Anzahl der Kästen, bei denen die Zahl auf dem Zettel im Kasten mit der Nummer des Kastens übereinstimmt, auf den Kasten schließen kann, in dem der Zettel mit der 7 liegt, folgt:

Der Zettel mit der Zahl 7 liegt im Kasten mit der Nummer 6.

560813 Lösung *10 Punkte*

I. Wenn die Zahl z die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, dann gilt:

Es gibt positive ganze Zahlen a, b und c mit

$$z = a \cdot 10\,000 + b \cdot 100 + c\,, \tag{1}$$
$$a, b, c \in \{1, 2, 3, \ldots, 99\}\,, \tag{2}$$
$$a : b : c = 1 : 2 : 3 \tag{3}$$

und

$$72 \mid z\,. \tag{4}$$

Aus (3) folgt

$$c = 3 \cdot a\,, \quad b = 2 \cdot a\,. \tag{5}$$

Aus (1) und (5) folgt

$$z = 10\,203 \cdot a\,. \tag{6}$$

Wegen $72 = 8 \cdot 9$ und wegen Bedingung (4) muss z durch 8 und 9 teilbar sein. Wegen (6) und da 10 203 nicht durch 8 teilbar ist, muss a durch 8 teilbar sein. Wegen (6) und da 10 203 zwar durch 3, aber nicht durch 9 teilbar ist, muss a durch 3 teilbar sein. Da 3 und 8 zueinander teilerfremd sind, muss a folglich durch $(3 \cdot 8 =)$ 24 teilbar sein. Wegen $c = 3 \cdot a$ und (2) folgt $a = 24$. Hieraus und wegen (5) folgt $b = 48$ und $c = 72$.

Wenn es eine Zahl gibt, welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, dann kann dies also nur 244 872 sein.

II. Die Zahl 244 872 ist eine sechsstellige natürliche Zahl, welche wegen $244\,872 : 72 = 3\,401$ tatsächlich durch 72 teilbar ist. Die durch Trennen nach der zweiten und vierten Ziffer entstehenden Zahlen sind 24, 48 und 72. Sie verhalten sich tatsächlich wie $1 : 2 : 3$.

Aus I. und II. folgt, dass 244 872 die einzige Zahl ist, welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

560814 Lösung *10 Punkte*

Wir bezeichnen den Lotfußpunkt des Lotes vom Inkreismittelpunkt I auf die Gerade AB mit D. Weiter bezeichnen wir den Lotfußpunkt des Lotes vom Ankreismittelpunkt M auf die Gerade AB mit E, siehe Abbildung L 560814. Dann gilt

$$|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle MED| = 90^\circ\,. \tag{1}$$

Nach dem Satz über die Berührradien sind $\overline{DI}$ und $\overline{EM}$ Radien des In- bzw. Ankreises und es gilt

$$r = |DI|\,, \quad R = |EM|\,. \tag{2}$$

Da das Dreieck ABC gleichseitig ist, gilt

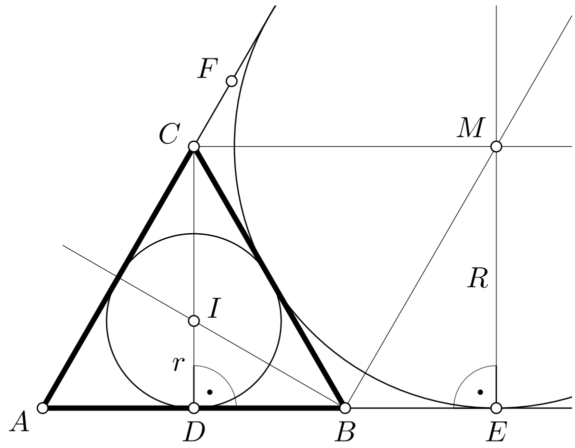
$$|\sphericalangle ACB| = 60° \tag{3}$$

und das Lot CD ist Winkelhalbierende des Winkels ACB. Folglich gilt

$$|\sphericalangle DCB| = 30°\,. \tag{4}$$

Es sei F ein Punkt auf der Geraden AC derart, dass C zwischen den Punkten A und F liegt. Dann ist der Winkel BCF ein Außenwinkel des Dreiecks ABC im Punkt C. Wegen (3) gilt

$$|\sphericalangle BCF| = 180° - 60° = 120°\,. \tag{5}$$



L 560814

Da der dem Punkt A gegenüberliegende Ankreis die Strecke $\overline{BC}$ und die Geraden AB und AC berührt und außerhalb des Dreiecks ABC liegt, liegt sein Mittelpunkt M auf der Winkelhalbierenden des Winkels BCF. Wegen (5) gilt daher

$$|\sphericalangle BCM| = 60°\,. \tag{6}$$

Aus (4) und (6) folgt

$$|\sphericalangle DCM| = 90°\,. \tag{7}$$

Wegen (1) und (7) besitzt das Viereck $CDEM$ drei rechte Innenwinkel und ist folglich ein Rechteck. Daher gilt

$$|EM| = |CD|\,. \tag{8}$$

Der Inkreismittelpunkt I des Dreiecks ABC ist der Schnittpunkt der Innenwinkelhalbierenden des Dreiecks ABC. Da das Dreieck ABC gleichseitig ist, ist der Punkt I auch der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC. Da sich die Seitenhalbierenden jedes Dreiecks im Verhältnis 1 : 2 teilen, gilt

$$|DI| = \frac{1}{3} \cdot |CD|\,. \tag{9}$$

Aus (2), (8) und (9) folgt $r = \frac{1}{3} \cdot R$.

Die Ankreisradiuslänge R steht zur Inkreisradiuslänge r folglich im Verhältnis 3 : 1.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 560811	*Insgesamt: 10 Punkte*
Aufstellen der beiden Geschwindigkeitsgleichungen für Bernd	2 Punkte
Korrekte Herleitung der Laufzeiten beider Läufer	6 Punkte
Richtige Lösung für die Geschwindigkeit beider Läufer	2 Punkte

Aufgabe 560812	*Insgesamt: 10 Punkte*
Angabe einer prinzipiell geeigneten Lösungsidee zur Lösung des Problems	4 Punkte
Vollständige und korrekte Herleitung der Lösung	6 Punkte

Aufgabe 560813	*Insgesamt: 10 Punkte*
Durchführung aller notwendigen Teilerbetrachtungen	6 Punkte
Ermittlung aller für z möglichen Zahlen	2 Punkte
Probe und korrektes Ergebnis	2 Punkte

Aufgabe 560814	*Insgesamt: 10 Punkte*
Zeichnung mit Bezeichnung der verwendeten Punkte	2 Punkte
Herleitung prinzipiell verwendbarer Lagebeziehungen	3 Punkte
Vervollständigung der Herleitung des Verhältnisses $R : r$	4 Punkte
Korrektes Verhältnis $R : r$	1 Punkt