56. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 9 und 10
Lösungen

561011 Lösung *10 Punkte*

Wir bezeichnen mit x und y die Anzahl der Wanderwege zwischen B und D bzw. zwischen C und D. Alle Wanderrouten von B nach D erhält man wie folgt. Man kann direkt einen Wanderweg von B nach D gehen, das liefert x Möglichkeiten. Geht man hingegen von B nach C und dann nach D, liefert dies $2 \cdot y$ Wanderrouten. Geht man von B nach C, dann nach A und dann nach D, erhält man $2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$ Wanderrouten. Geht man von B nach A und dann nach D, erhält man $3 \cdot 5 = 15$ Wanderrouten. Geht man von B nach A, dann nach C und dann nach D, erhält man $3 \cdot 4 \cdot y$ Wanderrouten. Insgesamt erhält man daraus die Gleichung

$$x + 2\,y + 40 + 15 + 12\,y = 104\,,$$

also

$$x + 14\,y = 49\,.$$

Analog erhält man für die Routen von C nach D die Gleichung

$$y + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot x + 2 \cdot x + 2 \cdot 3 \cdot 5 = 151\,,$$

also

$$14\,x + y = 101\,.$$

Addition und Division durch 15 bzw. Subtraktion und Division durch 13 der so gewonnenen Gleichungen liefert die Gleichungen

$$x + y = 10\,,$$
$$x - y = 4\,.$$

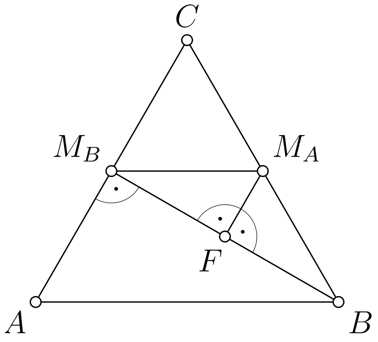
Erneute Addition bzw. Subtraktion beider Gleichungen liefert jeweils nach Division durch 2 die Werte $x = 7$ und $y = 3$.

Von A nach C gibt es dann $4 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot y + 5 \cdot x \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot y = 158$ Wanderrouten.

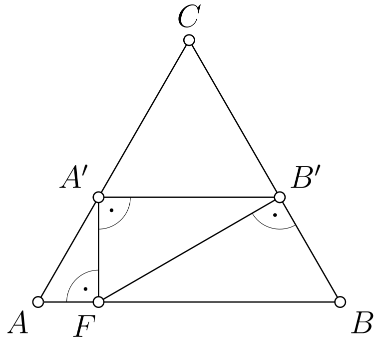
561012 Lösung *10 Punkte*

Im Prinzip gibt es die folgenden in der Skizze dargestellten drei Lösungsmöglichkeiten sowie verschiedene Varianten, die Zerlegung zu definieren und dazu die Rechtwinkligkeit dreier Teildreiecke und die Gleichseitigkeit des vierten zu zeigen.

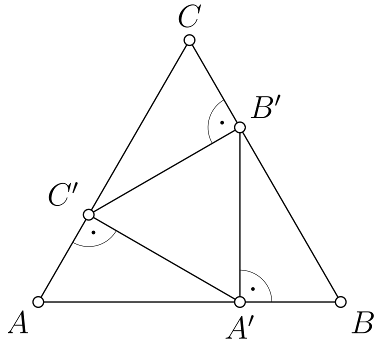
In den drei hier angegebenen Varianten seien die Eckpunkte des gegebenen Dreiecks in mathematisch positivem Umlauf mit A, B und C bezeichnet.



L 561012 a



L 561012 b



L 561012 c

Erste Lösung: Es sei M_B der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$ und M_A der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ (siehe Abbildung L 561012 a). Dann ist BM_B die Mittelsenkrechte der Seite $\overline{AC}$, also das Dreieck ABM_B rechtwinklig. Die Gerade M_BM_A ist die Mittelparallele im Dreieck ABC zu $\overline{AB}$. Also ist das Dreieck M_BM_AC gleichseitig mit der Seitenlänge $\frac{1}{2}\,|BC|$. Folglich ist das Dreieck M_BBM_A gleichschenklig mit der Basis $\overline{M_BB}$ und wird von der Senkrechten zu $\overline{M_BB}$ durch deren Mittelpunkt F in die zwei rechtwinkligen Dreiecke M_BFM_A und M_AFB geteilt. Also bilden die Dreiecke M_BM_AC, ABM_B, M_BFM_A und M_AFB eine Zerlegung wie gefordert.

Zweite Lösung: Halbiert man ein gleichseitiges Dreieck mittels einer seiner Höhen, erhält man zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke, da die Höhe gleichzeitig Symmetrieachse ist.

Jedes dieser gleichseitigen Dreiecke hat nach Konstruktion einen Innenwinkel von 60° und von den beiden an diesem Winkel anliegenden Dreiecksseiten ist eine doppelt so lang wie die andere.

Ein beliebiges Dreieck, welches einen Innenwinkel von 60° aufweist und bei dem eine der an diesem Winkel anliegenden Seiten doppelt so lang ist wie die andere, hat mit den eben betrachteten Dreiecken also einen Innenwinkel sowie das Verhältnis der anliegenden Seiten gemein, ist also zu ihm ähnlich und damit rechtwinklig.

Diese Aussage wird im Folgenden zur Untersuchung der in der Abbildung L 561012 b angegebenen Zerlegung genutzt:

Sei x ein Fünftel der Kantenlänge des gleichseitigen Dreiecks ABC. Auf den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ werden die Punkte F, A' bzw. B' derart gewählt, dass $|AA'| = |BB'| = 2\,x$ und $|AF| = x$ ist.

Das Dreieck $A'B'C$ stimmt nach Konstruktion im Verhältnis zweier Seiten und im von ihnen eingeschlossenen Winkel bei C mit dem Dreieck ABC überein, ist also zu ihm ähnlich und damit gleichseitig.

Die Dreiecke AFA' und FBB' haben mit dem gleichseitigen Dreieck ABC einen Innenwinkel gemein und von den anliegenden Seiten ist jeweils eine doppelt so lang wie die andere. Sie sind also rechtwinklig.

Da der längeren Seite stets der größere Winkel gegenüberliegt, sind ihre rechten Winkel bei F und bei B' zu finden.

Werden die Dreiecke $A'B'C$, AFA' und FBB' abgeschnitten, verbleibt das Dreieck $A'FB'$ und es bleibt lediglich zu zeigen, dass dieses rechtwinklig ist.

Nun ist $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle B'A'C| = 60°$, da die entsprechenden Dreiecke gleichseitig sind. Mit dem Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck folgt

$$|\sphericalangle AA'F| = 180° - 90° - 60° = 30°\,,$$

da das entsprechende Dreieck ja bei F rechtwinklig ist und bei A den Innenwinkel BAC hat. Da die beiden von A' ausgehenden Strahlen durch F und durch B' den gestreckten Winkel $AA'C$ zerlegen, gilt

$$180° = |\sphericalangle AA'F| + |\sphericalangle FA'B'| + |\sphericalangle B'A'C| = 30° + |\sphericalangle FA'B'| + 60°\,.$$

Damit ist $|\sphericalangle FA'B'| = 180° - 30° - 60° = 90°$ und das Dreieck $FB'A'$ folglich rechtwinklig.

Dritte Lösung: Wird das Dreieck ABC um $90°$ um sein Symmetriezentrum gedreht und danach an diesem mit einem geeigneten Faktor so gestaucht, dass der Bildpunkt A' von A auf der Seite $\overline{AB}$ zu liegen kommt, so liegt auf Grund der Drehsymmetrie des gleichseitigen Dreiecks entsprechend der Bildpunkt B' von B auf der Seite $\overline{BC}$ und der Bildpunkt C' von C auf der Seite $\overline{CA}$.

In dieser Konstruktion ist $|\sphericalangle BA'B'| = |\sphericalangle CB'C'| = |\sphericalangle AC'A'| = 90°$ und das Dreieck $A'B'C'$ ähnlich zum Dreieck ABC, also gleichseitig.

Somit wurde das Dreieck ABC in der Tat restlos in drei rechtwinklige Dreiecke $AA'C'$, $BB'A'$ und $CC'B'$ sowie ein gleichseitiges Dreieck $A'B'C'$ zerlegt (siehe Abbildung L 561012 c), was zeigt, dass dies stets möglich ist.

<u>561013 Lösung</u> *10 Punkte*

Es bezeichne $n = [abcde]$ die Zifferndarstellung der Zahl n im Dezimalsystem. Dann gilt also

$$n = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^1 + e \cdot 10^0\,.$$

Teil a) Zu lösen ist die Gleichung

$$[abcde] - [pqrst] = 2017\,,$$

wobei jeder Buchstabe eine Ziffer bezeichne und alle Ziffern paarweise verschieden sind. Wegen

$$0 < [abcde] - [pqrst] < 10\,000$$

folgt

$$a = p + 1 \tag{1}$$

und $[qrst] - [bcde] = 10000 - 2017 = 7983$. Hieraus folgt $q - b \in \{7, 8\}$. Aus $q - b = 7$ würde folgen, dass $q \geq 7$ und $[rst] - [cde] = 983$ gilt, was nicht sein kann, weil $[rst] < 987$ und $[cde] \geq 012$ gilt. Folglich muss $q - b = 8$ gelten, also

$$(q, b) = (8, 0) \quad \text{oder} \quad (q, b) = (9, 1)\,. \tag{2}$$

In jedem Fall gilt $[cde] - [rst] = 1000 - 983 = 17$. Wegen $0 < [cde] - [rst] < 100$ folgt

$$c = r + 1 \tag{3}$$

und daher $[st] - [de] = 100 - 17 = 83$. Also gilt $s - d \in \{8, 9\}$. Allerdings würde aus $s - d = 9$ folgen, dass $s = 9$ und $d = 0$ gilt, was aber (2) widerspricht. Folglich gilt $s - d = 8$ und damit

$$(s, d) = (9, 1) \quad \text{oder} \quad (s, d) = (8, 0)\,, \tag{4}$$

je nachdem, welcher Fall in (2) gilt. Man erhält schließlich noch

$$t - e = 3\,. \tag{5}$$

Aus (2) und (4) ergibt sich, dass $\{q, b, d, s\} = \{0, 1, 8, 9\}$ und $\{a, p, r, c, e, t\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ gelten muss. Wegen (5) gibt es drei Fälle:

Fall 1: Wenn $(t, e) = (5, 2)$ ist, dann sind wegen (1) und (3) die Paare (a, p) und (c, r) gleich den Paaren $(4, 3)$ und $(7, 6)$.

Fall 2: Wenn $(t, e) = (6, 3)$ ist, dann gibt es wegen (1) und (3) keine Lösungen.

Fall 3: Wenn $(t, e) = (7, 4)$ ist, dann sind wegen (1) und (3) die Paare (a, p) und (c, r) gleich den Paaren $(3, 2)$ und $(6, 5)$.

Daher gibt es die folgenden acht Lösungen:

$$\begin{aligned} &40712 - 38695 = 2017\,, && 70412 - 68395 = 2017\,,\\ &41702 - 39685 = 2017\,, && 71402 - 69385 = 2017\,,\\ &30614 - 28597 = 2017\,, && 60314 - 58297 = 2017\,,\\ &31604 - 29587 = 2017 \quad \text{und} && 61304 - 59287 = 2017\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Wenn nicht alle Bedingungen für die Ziffern erkannt werden, ist es möglich, die Lösung durch teilweises Probieren zu finden. In diesem Fall ist zu zeigen, dass es keine weiteren Lösungen geben kann.

Teil b) Wie im Teil a) erhält man die Gleichungen (1) bis (4), lediglich (5) wird ersetzt durch

$$t - e = 4\,. \tag{5'}$$

Wegen (1) bis (4) ist in jedem der Paare (a, p), (b, d), (c, r) und (q, s) genau eine Ziffer gerade und eine Ziffer ungerade; die Ziffern (t, e) haben aber die gleiche Parität. Dies widerspricht der Forderung, dass unter den Ziffern $a, b, c, d, e, p, q, r, s, t$ gleich viele gerade wie ungerade Ziffern sein sollen. Daher gibt es hier keine Lösung.

<u>561014 Lösung</u> *10 Punkte*

Teil a) Durch systematisches Probieren findet man folgende Menge von Zahlen als Lösung der Teilaufgabe:

$$M = \{12, 18, 20, 28, 32, 44, 45, 50, 52\}\ .$$

Teil b) Folgendes Verfahren führt zum Ziel: Stelle fest, ob sich die Primfaktorzerlegung von n in der Form $n = p^5$ mit einer Primzahl p oder in der Form $n = p^2 \cdot q$ mit verschiedenen Primzahlen p und q darstellen lässt.

Beweis: $n = 1$ hat nur einen positiven Teiler. Sei $n > 1$ eine positive ganze Zahl.

Fall 1: Wenn n mindestens drei verschiedene Primfaktoren p, q, r hat, dann hat n wenigstens die acht Teiler 1, p, q, r, $p \cdot q$, $p \cdot r$, $q \cdot r$, $p \cdot q \cdot r$.

Fall 2: n hat zwei verschiedene Primfaktoren p und q.
Kommt einer der Primfaktoren, etwa p, in der Primfaktorzerlegung mindestens dreimal vor, so hat n mindestens die acht positiven Teiler 1, p, p^2, p^3, q, $q \cdot p$, $q \cdot p^2$, $q \cdot p^3$.
Die Zahl $n = p^2\,q^2$ hat genau die neun positiven Teiler 1, p, p^2, q, $p \cdot q$, $p^2 \cdot q$, q^2, $p \cdot q^2$, $p^2 \cdot q^2$.
Die Zahl $n = p\,q$ hat genau die vier positiven Teiler 1, p, q, $p \cdot q$.

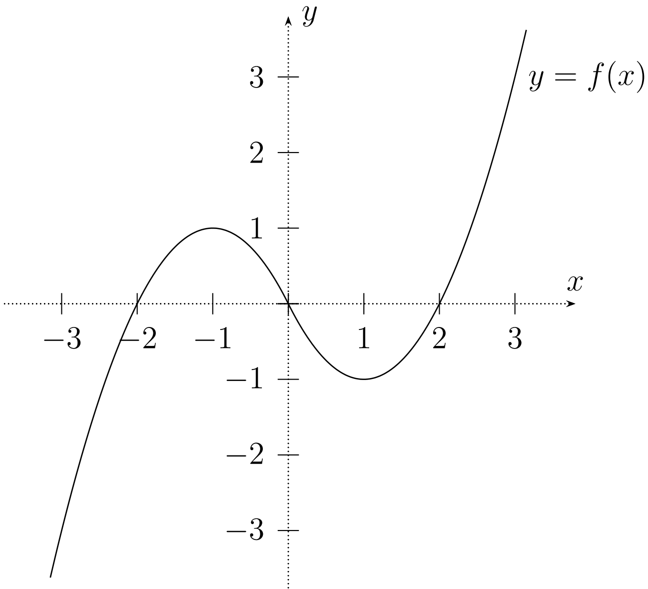
Die Zahl $n = p^2 q$ hat genau die sechs positiven Teiler 1, q, p, $p \cdot q$, p^2, $p^2 \cdot q$. Auch die Zahl $n = p q^2$ hat genau sechs positive Teiler.

Fall 3: n hat nur einen Primteiler p und damit die Gestalt $n = p^k$.
Diese Zahl hat genau die $k + 1$ positiven Teiler 1, p, p^2, …, p^k, hat also genau für $k = 5$ genau sechs positive Teiler.

Damit ist bewiesen, dass genau diejenigen positiven ganzen Zahlen genau sechs positive Teiler haben, die sich in der Form $n = p^5$ oder $n = p^2 \cdot q$ mit verschiedenen Primzahlen p und q darstellen lassen.

<u>561015 Lösung</u> *10 Punkte*

Teil a)



Teil b) Für $x \geq 0$ gilt $f(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$. Der Graph G_+ dieser Funktion ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S_1 = (1, -1)$.

Für $x \leq 0$ gilt $f(x) = -x^2 - 2x = -(x+1)^2 + 1$. Der Graph G_- dieser Funktion ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S_2 = (-1, 1)$.

Der Graph von $f(x)$ besteht damit aus diesen beiden Teilgraphen G_+ und G_-, die im Punkt $S = (0, 0)$ zusammentreffen.

Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $f(x) = s$ entspricht der Anzahl der Schnittpunkte der horizontalen Geraden $y = s$ mit dem Graphen der Funktion $f(x)$. Diese Anzahlen lassen sich unmittelbar aus dem Graphen ablesen:

Fall 1: $s > 1$. Die Horizontale $y = s$ hat einen Schnittpunkt mit dem Teilgraphen G_+ (mit den Koordinaten $\left(1 + \sqrt{1+s}, s\right)$) und keinen mit dem Teilgraphen G_-.

Fall 2: $s = 1$. Die Horizontale $y = s$ enthält S_2 und einen weiteren Schnittpunkt mit dem Teilgraphen G_+ (mit den Koordinaten $\left(1 + \sqrt{2}, 1\right)$).

Fall 3: $0 < s < 1$. Die Horizontale $y = s$ hat zwei Schnittpunkte mit dem Teilgraphen G_- (mit den Koordinaten $\left(-1 \pm \sqrt{1-s}, s\right)$) und einen mit dem Teilgraphen G_+ (mit den Koordinaten $\left(1 + \sqrt{1+s}, s\right)$).

Fall 4: $s = 0$. Die Horizontale $y = s$ enthält S sowie die Punkte $(-2, 0)$ und $(2, 0)$.

Fall 5: $-1 < s < 0$. Die Horizontale $y = s$ hat einen Schnittpunkt mit dem Teilgraphen G_- (mit den Koordinaten $\left(-1 - \sqrt{1-s}, s\right)$) und zwei mit dem Teilgraphen G_+ (mit den Koordinaten $\left(1 \pm \sqrt{1+s}, s\right)$).

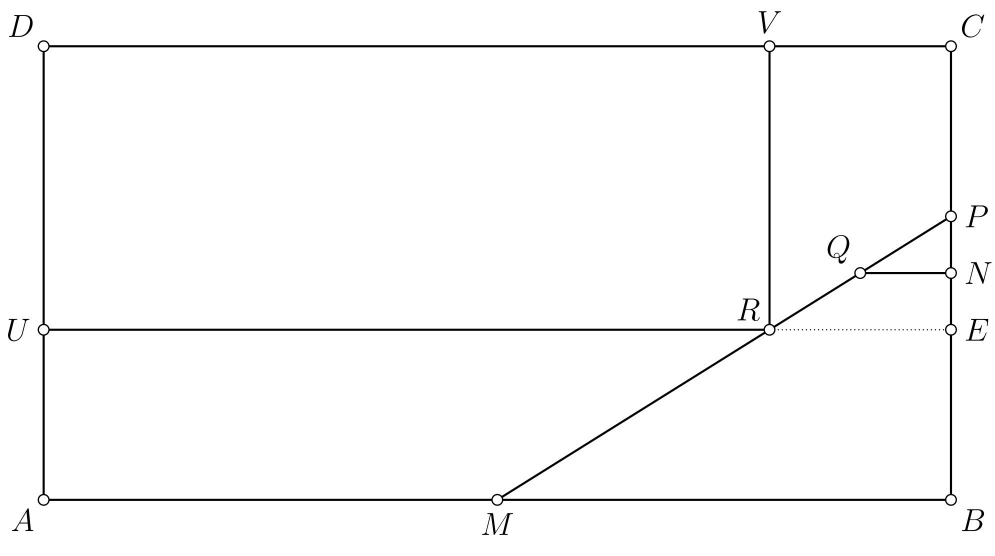
Fall 6: $s = -1$. Die Horizontale $y = s$ enthält S_1 und einen weiteren Schnittpunkt mit dem Teilgraphen G_- (mit den Koordinaten $\left(-1 - \sqrt{2}, -1\right)$).

Fall 7: $s < -1$. Die Horizontale $y = s$ hat einen Schnittpunkt mit dem Teilgraphen G_- (mit den Koordinaten $\left(-1 - \sqrt{1-s}, s\right)$) und keinen mit dem Teilgraphen G_+.

Die Gleichung hat also genau für $s = 1$ und $s = -1$ genau zwei Lösungen.

<u>561016 Lösung</u> *10 Punkte*

Im Weiteren werden drei Lösungsansätze (die erste in zwei Varianten) angegeben. Die erste Lösung nutzt die gegebenen Größen, um schrittweise die Seitenlängen des zu untersuchenden Rechtecks zu bestimmen. Die Variante dieser Lösung nutzt zwar geometrisch etwa den gleichen Ansatz, bestimmt aber zunächst allgemein eine Formel für den gesuchten Flächeninhalt in Abhängigkeit von den gegebenen Werten und setzt die gegebenen Werte erst zum Schluss ein (was insbesondere bei praktischen Problemstellungen wegen der Fehlerfortpflanzung beim Rechnen mit gerundeten Werten sowie bei Problemstellungen vorzuziehen ist, die mit anderen gegebenen Größen wiederkehren können). Der zweite Lösungsansatz widmet sich der Idee, durch Zerlegungsgleichheit den gesuchten Flächeninhalt in den leicht bestimmbaren Inhalt einer anderen Fläche zu überführen. Der dritte Lösungsansatz gibt ein Beispiel für eine analytische Lösung.



L 561016 a

Erste Lösung: Betrachtet wird der Strahlensatz zu den Strahlen PM und PB und den parallelen Geraden MB und QN (siehe Abbildung L 561016 a).

Sei E der Schnittpunkt der Geraden BC und UR. Mit x wird die Länge der Strecke $\overline{CP}$ bezeichnet. Die Strecke $\overline{PN}$ hat dann die Länge $3 - x$ und die Strecken $\overline{PB}$ und $\overline{CE}$ haben jeweils die Länge $6 - x$. Laut Strahlensatz gilt:

$$\frac{|QN|}{|PN|} = \frac{|MB|}{|PB|} \quad \text{und damit} \quad |QN| = \frac{6\,(3-x)}{6-x}\,. \tag{1}$$

Laut Strahlensatz und Konstruktion des Punktes R in der Aufgabenstellung gilt

$$\frac{|QP|}{|RP|} = \frac{|QN|}{|RE|} = \frac{1}{2}\,.$$

Daraus ergibt sich $|RE| = 2\,|QN|$.

Für die Strecke $\overline{UR}$ gilt demnach $|UR| = 12 - 2\,|QN|$ und nach Einsetzen von (1)

$$|UR| = 12 - \frac{12\,(3-x)}{6-x} = \frac{12\,(6-x) - 12\,(3-x)}{6-x} = \frac{72 - 12\,x - 36 + 12\,x}{6-x} = \frac{36}{6-x}\,.$$

Für die Strecke $\overline{VR}$ gilt $|VR| = |CE| = 6 - x$. Der Flächeninhalt des Rechtecks $URVD$ ergibt sich dann wie folgt:

$$F(URVD) = \frac{36}{6-x}\,(6-x) = 36\,.$$

Lösungsvariante: Betrachtet wird der Strahlensatz zu den Strahlen PM und PB und den parallelen Geraden AB, UR und QN (siehe Abbildung L 561016 a). Sei dazu E der Schnittpunkt der Geraden BC und UR.

Der Strahlensatz liefert einerseits die Existenz eines Ähnlichkeitsfaktors k mit $k\,|PE| = |RE|$ sowie $k\,|PB| = |MB|$ und andererseits wegen $|PQ| = |QR|$ auch $|PN| = |NE|$. Da nach Konstruktion die Vierecke $ABEU$ und $VREC$ Rechtecke sind, gilt $|UE| = |AB|$ und $|VR| = |CE|$.

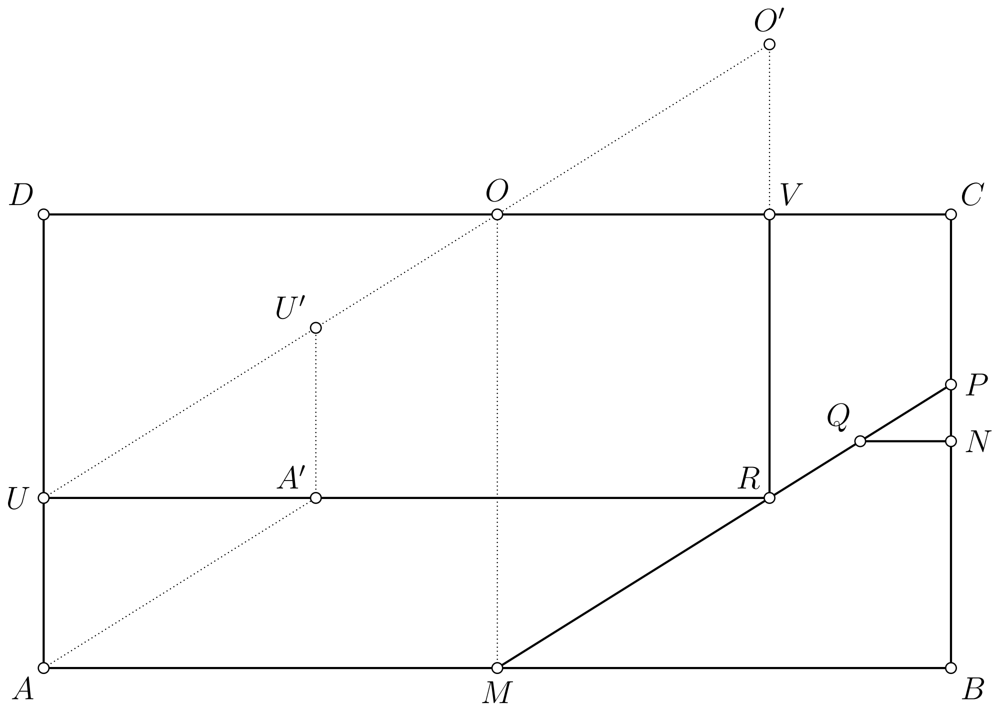
Damit ist der gesuchte Flächeninhalt stets gleich

$$\begin{aligned}
|UR| \cdot |VR| &= (|UE| - |RE|)\;|CE| \\
&= (|AB| - k\;|PE|)\,(|CN| + |NE|) \\
&= (2\;|MB| - 2\,k\;|PN|)\,(|BN| + |NP|) \\
&= (2\,k\;|PB| - 2\,k\;|PN|)\;|BP| \\
&= 2\,(|PB| - |PN|)\,k\;|BP| \\
&= 2\;|BN| \cdot |BM| \\
&= \frac{1}{2}\;|BC| \cdot |AB| \\
&= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36\,.
\end{aligned}$$

Zweite Lösung: Sei O der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$ (siehe Abbildung L 561016 b). Wir zeigen, dass das Rechteck $AMOD$ wie folgt in das Rechteck $URVD$ verwandelt werden kann:

- Zerschneide das Rechteck $AMOD$ längs $\overline{UO}$.
- Verschiebe das Viereck $AMOU$ um den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{MR}$ auf das Viereck $A'RO'U'$.
- Schneide das überstehende Dreieck OVO' ab und klebe es in die kongruente Lücke – das Dreieck $UA'U'$.

Damit ist zugleich gezeigt, dass $F(URVD) = F(AMOD) = 36$ gilt.



L 561016 b

Genauer:

Nach Konstruktion von R und U ist U das Spiegelbild von P bei Spiegelung am Diagonalenschnittpunkt des Vierecks $ABCD$ und O das Spiegelbild von M bei derselben Spiegelung. Daher gilt $UO \parallel MP = MR$.

Durch die Verschiebung mit dem Verschiebungspfeil $\overrightarrow{MR}$ wird das Viereck $AMOU$ auf das Viereck $A'RO'U'$ abgebildet. Nach Konstruktion liegt der Punkt A' auf $\overline{UR}$, der Punkt U' auf $\overline{UO}$, der Punkt O auf $\overline{U'O'}$ und der Punkt V auf $\overline{RO'}$. Das aus dem Rechteck $URVD$ herausragende Dreieck OVO' ist daher kongruent zu dem in demselben Rechteck gelegenen Dreieck $UA'U'$.

Es folgt

$$\begin{aligned} F(URVO) &= F(UA'U') + F(A'RVOU') \\ &= F(OVO') + F(A'RVOU') \\ &= F(A'RO'U') \\ &= F(AMOU)\,. \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} F(URVD) &= F(ODU) + F(URVO) \\ &= F(ODU) + F(AMOU) \\ &= F(AMOD) \\ &= 36\,. \end{aligned}$$

Dritte Lösung: Das Rechteck $ABCD$ wird in ein Koordinatensystem mit Punkt M im Koordinatenursprung gelegt.

Die Koordinaten des Punktes R werden mit (x_R, y_R) bezeichnet. Alle anderen Koordinaten von Punkten werden analog bezeichnet.

Der Punkt R ergibt sich durch Spiegelung von P an Q. Also gilt:

$$6 - x_Q = x_Q - x_R \quad \text{und damit} \quad x_R = 2\,x_Q - 6\,. \tag{2}$$

Die Punkte M, R, Q und P liegen auf dem Graphen der Funktion $f(x)$ mit der Gleichung $f(x) = \frac{y_P}{6} \cdot x$. Einsetzen der Koordinaten von Q in f ergibt

$$3 = \frac{y_P}{6} \cdot x_Q \quad \text{und damit} \quad x_Q = \frac{18}{y_P}\,.$$

Zusammen mit (2) erhalten wir

$$x_R = 2 \cdot \frac{18}{y_P} - 6 = \frac{36}{y_P} - 6\,.$$

Die Seitenlängen des Rechtecks ergeben sich daraus zu

$$|UR| = 6 + x_R = \frac{36}{y_P} \quad \text{und} \quad |VR| = |CE| = |PB| = y_P\,.$$

Der Flächeninhalt des Rechtecks ergibt sich dann wie folgt:

$$F(URVD) = |UR| \cdot |VR| = \frac{36}{y_P} \cdot y_P = 36\,.$$

Der Flächeninhalt beträgt also unabhängig von der Wahl des Punktes P genau 36 Flächeneinheiten.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 561011 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Einführung von geeigneten Variablen .... 1 Punkt

Modellierung der Zusammenhänge von Routenanzahlen und Wegeanzahlen .... 5 Punkte

Zur Modellierung gehören in der Musterlösung alle Terme zur Berechnung von Wanderroutenanzahlen aus Wegeanzahlen sowie die sich daraus ohne Umformung ergebenden Gleichungen.

Angabe der Lösung des Gleichungssystems für die Wegeanzahlen .... 1 Punkt

Durch die Aufgabenstellung ist gegeben, dass sich so ergebende Gleichungssysteme lösbar sind. Deshalb ist hier eine Probe unnötig, da sich eine eindeutige Lösung ergibt.

Nachweis der Eindeutigkeit der Lösung .... 2 Punkte

Die Begründung für die Antwort muss insbesondere alle weiteren Anzahlen ausschließen. Entsprechen die gefundenen Anzahlen nur den modellierten Zusammenhängen, muss das nicht heißen, dass sie auch im Sinne der Aufgabe möglich sind – die Begründung der Antwort wäre dann unvollständig. Der Nachweis der Eindeutigkeit ist beispielsweise durch Angabe einer Herleitung der Lösung erbracht. Kurz: Probe bringt auch hierfür nichts.

Angabe des Endergebnisses .... 1 Punkt

Aufgabe 561012 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Exakte Definition der Zerlegung .... 4 Punkte

Eine Skizze, die nur prinzipiell zeigt, wie ein Dreieck in vier Teildreiecke zerlegt werden kann, ist schon einen Punkt wert. Wenn in ihr klar wird, welches gleichseitig sein soll (und dies möglich ist), gibt es zwei Punkte. Alle vier Punkte gibt es, wenn eine konkrete Zerlegung vollständig korrekt definiert wurde – das kann auch ohne Angabe einer Skizze erfolgen.

Nachweis der Korrektheit .... 6 Punkte

- Nachweis der Gleichseitigkeit eines Teildreiecks .... 2 Punkte
- Nachweis der Rechtwinkligkeit eines Teildreiecks .... 2 Punkte
- Je weiterem Nachweis der Rechtwinkligkeit eines Teildreiecks .... 1 Punkt

Aufgabe 561013 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 6 Punkte

Einführung von Variablen .... 1 Punkt

Herleiten von Bedingungen .... 2 Punkte

Ermitteln aller Lösungen .... 3 Punkte

Teil b) .... 4 Punkte

Herleiten bzw. Übertragen der Bedingungen aus a) .... 2 Punkte

Herleiten weiterer Bedingungen .... 1 Punkt

Abschluss des Beweises .... 1 Punkt

Aufgabe 561014 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 3 Punkte

Einen Punkt gibt es, wenn mehr richtige als falsche Zahlen angegeben sind. Zwei Punkte gibt es, wenn höchstens eine Zahl fehlt und höchstens eine falsche dabei ist.

Teil b) Angabe eines Verfahrens .... 3 Punkte

Kriterien: Das Verfahren ist durchführbar und nachvollziehbar beschrieben, funktioniert für Zahlen mit genau 6 Primteilern und auch für Zahlen mit mehr oder weniger als 6 Primteilern.

Beweis der Richtigkeit .... 4 Punkte

In Ansätzen entsprechend der Musterlösung gibt es einen Punkt auf den Ansatz über eine vollständige Fallunterscheidung und je korrekt bearbeitetem Fall einen weiteren Punkt. Bei abweichendem Ansatz gibt es einen Punkt für einen sinnvollen Beweisansatz; die restlichen drei Punkte werden anteilig auf die Durchführung vergeben.

Aufgabe 561015 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 2 Punkte

Teil b) .... 8 Punkte

Schnittpunkte mit der Geraden $y = s$ zählen .... 1 Punkt

Ansatz einer vollständigen Fallunterscheidung .... 2 Punkte

1. bis 4. korrekt betrachteter Fall je .... 1 Punkt

5. bis 7. korrekt betrachteter Fall zusammen .... 1 Punkt

Es ist auch denkbar, die Punktsymmetrie $f(-x) = -f(x)$ einzusetzen, um etwa die Fallunterscheidung auf vier Fälle für $|s|$ zu reduzieren. Die einzelnen Fälle erhalten dann etwa insgesamt 3 Punkte (erste zwei je einer, nächste zwei noch einer), die verkürzende Idee erhält dann etwa zwei zusätzliche Punkte und einen weiteren Punkt gäbe es, wenn man aus dem Wert von $|s|$ die Werte von s wirklich gewinnt. Analog ist mit anderen Ideen zu kürzeren Fallunterscheidungen zu verfahren. Bei längeren Fallunterscheidungen sollen die 6 Durchführungspunkte nach Anteil der korrekten Abarbeitung vergeben werden.

Lösungen mit Strahlensatz oder Koordinatensystem:
Ideen zur Ermittlung von Hilfsgrößen .... 4 Punkte
Ansatz zur Ermittlung der gesuchten Größe .... 1 Punkt
Korrekt begründete Ausführung der Ideen .... 4 Punkte
Korrekte Ausführung des Ansatzes .... 1 Punkt

Ideen zur Ermittlung von Hilfsgrößen können eine Skizze, Einführung von Hilfslinien oder eines geeigneten Koordinatensystems sowie etwa Nennung von Strahlensatzfiguren sein. Bei unvollständigen Lösungen können allein auf die Ideen bis zu fünf Punkte vergeben werden. Bei Zerlegungslösungen entspricht die vollständig nachvollziehbare Idee einer funktionierenden Zerlegung genau den erstgenannten fünf Punkten. Ideen für Zerlegungslösungen können auch das Vieleck $ABCVRU$ betreffen, welches Rechteck $URVD$ zu Rechteck $ABCD$ ergänzt. In der Ausführung der jeweiligen Zerlegungsidee ist zu begründen, dass die verglichenen Flächen tatsächlich zerlegt wurden und dass entsprechende Teile tatsächlich kongruent sind.

Zerlegungslösungen:
Zerlegungsidee nachvollziehbar dargelegt .... 4 Punkte
Nachweis der Zerlegung von $URVD$ und Vergleichsobjekt (etwa $AMOD$) .... 2 Punkte
Nachweis der Kongruenz entsprechender Teile der Zerlegung .... 3 Punkte
Ergebnis .... 1 Punkt