56. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Lösungen

561211 Lösung *10 Punkte*

Erste Lösung: Angenommen, es gibt reelle Zahlen x und y, die das Gleichungssystem erfüllen. Damit die Wurzeln in Gleichung (1) definiert sind, muss dann $x \geq 2016$ und $y \geq 56$ gelten. Das Quadrieren der Gleichung (1) liefert mit binomischer Formel und Gleichung (2) der Reihe nach

$$\begin{aligned} x - 2016 + 2\sqrt{x-2016}\sqrt{y-56} + y - 56 &= 121\,, \\ x + y + 2\sqrt{x-2016}\sqrt{y-56} &= 2193\,, \\ 2\sqrt{x-2016}\sqrt{y-56} &= 0\,. \end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung kann nur erfüllt werden für $x = 2016$ oder $y = 56$. Zu $x = 2016$ berechnet man mittels (2) den Wert $y = 177$, zu $y = 56$ erhält man ebenfalls aus (2) den Wert $x = 2137$. Mögliche Lösungspaare sind also nur

$$(2016, 177) \quad \text{und} \quad (2137, 56)\,.$$

Durch Einsetzen sieht man sofort, dass diese beiden Paare wirklich das Gleichungssystem erfüllen.

Zweite Lösung: Um die Wurzeln zu vermeiden, kann man sie durch $a = \sqrt{x-2016}$ und $b = \sqrt{y-56}$ substituieren. Hat man dafür eine Lösung mit $a \geq 0$ und $b \geq 0$ gefunden, so erhält man das Lösungspaar (x, y) durch

$$x = a^2 + 2016 \quad \text{und} \quad y = b^2 + 56\,. \tag{1}$$

Daraus ergibt sich $x + y = a^2 + b^2 + 2072$. Gelöst werden kann also ein äquivalentes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + b &= 11\,, \\ a^2 + b^2 &= 121 \qquad \text{mit } a \geq 0 \text{ und } b \geq 0\,. \end{aligned}$$

Setzt man $b = 11 - a$ in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich

$$a^2 + (11-a)^2 = 2a^2 - 22a + 121 = 121\,,$$

also $2a(a - 11) = 0$ mit den beiden Lösungen $a = 0$ oder $a = 11$. Beide Gleichungen sind dann für $b = 11$ bzw. $b = 0$ erfüllt. In beiden Fällen sind a und b nichtnegativ.

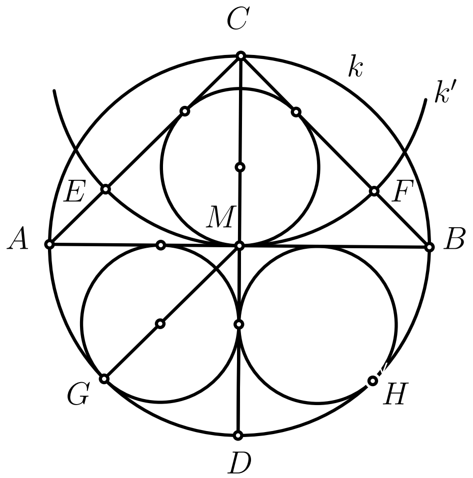
Mit (1) ergeben sich daraus genau zwei Lösungspaare für (x, y), nämlich

$$(2016, 177) \quad \text{und} \quad (2137, 56)\,.$$

<u>561212 Lösung</u> *10 Punkte*

Erste Lösung: Da $\overline{AB}$ ein Durchmesser des Kreises ist, ist der Kreismittelpunkt M auch Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Wäre $\overline{AB}$ ein Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks, so müsste $|AB| = |AC|$ oder $|AB| = |BC|$ gelten, woraus für den Durchmesser $B \equiv C$ bzw. $A \equiv C$ folgen würde, was in der Aufgabe ausgeschlossen ist. Also ist $\overline{AB}$ die Basis des gleichschenkligen Dreiecks. Nach der Umkehrung des Thalessatzes ist dieses Dreieck rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C.

Wir zeichnen zusätzlich den Kreis k' mit dem Mittelpunkt C, der durch den Punkt M verläuft. Die Schnittpunkte mit den Katheten $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ seien mit E bzw. F bezeichnet.



L 561212 a

Da im gleichschenkligen Dreieck ABC die Strecke $\overline{CM}$ gleichzeitig Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte und Höhe ist, ist die Hypotenuse $\overline{AB}$ im Punkt M gemeinsame Tangente des Inkreises und des Kreises k'.

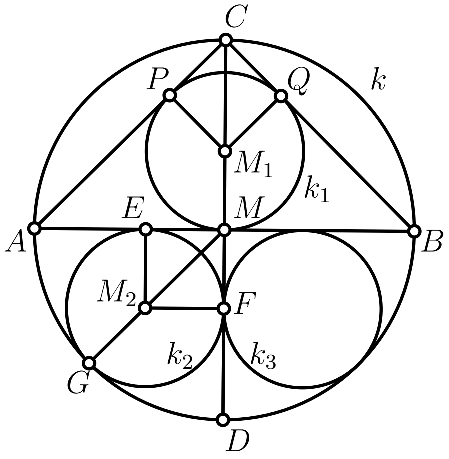
Da die Strecke $\overline{MC}$ sowohl in k als auch in k' ein Radius ist, sind die Kreise k und k' kongruent. Damit sind auch ihre Viertelkreise kongruent.

Die drei betrachteten Inkreise sind somit im Sinne der Aufgabe Inkreise der kongruenten Viertelkreise CEF, MAD und MDB und somit selbst kongruent. Das war zu beweisen.

Zweite Lösung: Wie in der ersten Lösung stellt man zunächst den rechten Winkel bei C fest.

Die beiden Kreise k_2 und k_3, die den Durchmesser $\overline{AB}$, den Radius $\overline{MD}$ und den Kreis k berühren, siehe Abbildung L 561212 b, sind wegen der Spiegelsymmetrie an $\overline{MD}$ zueinander kongruent, haben also gleichen Radius.

Um zu zeigen, dass auch der Inkreis k_1 des Dreiecks ABC den gleichen Radius besitzt, berechnen wir die Radien von k_1 und k_2.



L 561212 b

Der Radius des Kreises k sei r. Es seien M_1 der Mittelpunkt und r_1 der Radius des Kreises k_1. Der Kreis k_1 berühre die Schenkel $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ in den Punkten P bzw. Q. Das Viereck M_1QCP ist ein Quadrat. Es gilt

$$|MC| = |MM_1| + |M_1C| ,$$
$$r = r_1 + r_1\sqrt{2} ,$$

also

$$r_1 = \frac{r}{1+\sqrt{2}} .$$

Der Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius r_2 berühre die Radien $\overline{MA}$, $\overline{MD}$ und den Kreis k in den Punkten E, F bzw. G. Das Viereck M_2FME ist ein Quadrat. Es gilt

$$|MG| = |GM_2| + |M_2M| ,$$
$$r = r_2 + r_2\sqrt{2} ,$$

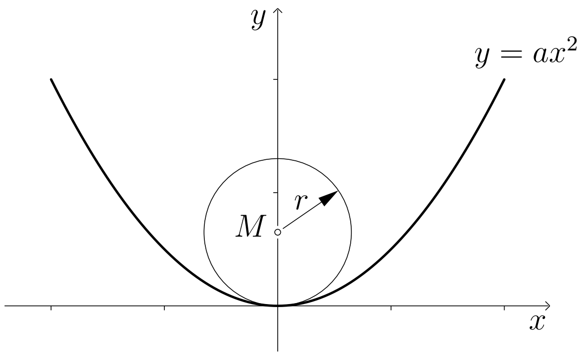
also

$$r_2 = \frac{r}{1+\sqrt{2}} .$$

Damit wurde bewiesen, dass die drei einbeschriebenen Kreise gleichen Radius haben.

561213 Lösung *10 Punkte*

Erste Lösung:



L 561213 a

In einem Längsschnitt, vgl. Abbildung L 561213 a, werden ein Kreis und eine Parabel betrachtet. Ein Koordinatensystem wird mit seinem Ursprung im Scheitelpunkt der Parabel gewählt. Die Parabel hat die Gleichung

$$y = ax^2 .$$

Der Radius des Kreises sei r. Damit der Kreis die Parabel im Scheitelpunkt berührt, muss seine Gleichung

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2$$

sein.

Betrachtet werden die Schnittpunkte und Berührungspunkte von Parabel und Kreis. Aus der Kreisgleichung folgt

$$x^2 = -y^2 + 2yr .$$

Eingesetzt in die Parabelgleichung ergibt sich

$$y = -ay^2 + 2ayr .$$

Das ist äquivalent zu

$$y = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{2ar - 1}{a} .$$

Aus $y = 0$ folgt $x = 0$, diese Lösung ist der gewünschte Berührungspunkt.

Durch erneutes Einsetzen der zweiten Lösung in die Parabelgleichung findet man

$$\frac{2ar - 1}{a} = ax^2 \text{ und}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2ar - 1}{a^2}} .$$

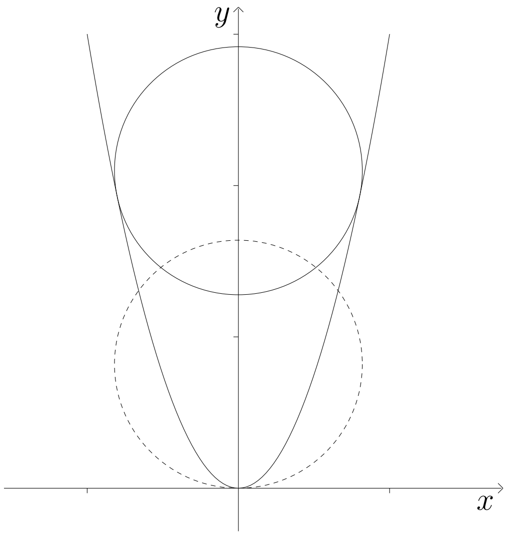
Diese Werte für x sind nach der Struktur der Gleichungen offensichtlich Lösungen sowohl für die Parabel- als auch die Kreisgleichung.

Damit der Kreis die Parabel genau einmal berührt und darüber hinaus nirgendwo schneidet, darf es keine Lösungen mit $x \neq 0$ geben. (Abbildung L 561213 b veranschaulicht die Notwendigkeit dieser Bedingung.) Daher gilt

$$r \leq \frac{1}{2a} . \tag{1}$$

Genau dann, wenn der Kreis durch den Scheitelpunkt der Parabel verläuft und für seinen Radius die Ungleichung (1) gilt, hat er mit der Parabel keinen weiteren Punkt gemeinsam.

Damit sind die möglichen Radien der Eiskugel gefunden.

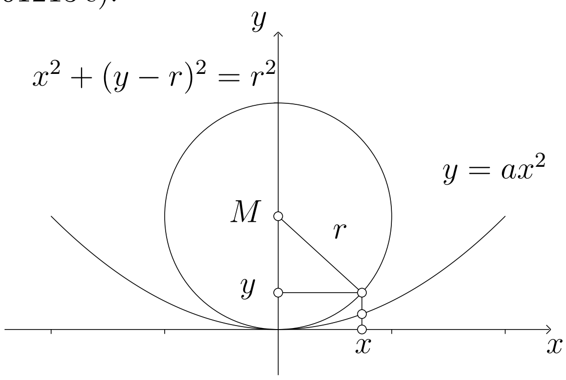


L 561213 b
Hier sind die Augen größer als der Magen.

Zweite Lösung: Wie in der ersten Lösung stellt man fest, dass es genügt, einen Kreis und eine Parabel zu betrachten. Der Kreis mit dem Radius r ist durch die Gleichung $x^2 + (y - r)^2 = r^2$ gegeben. Damit der Kreis oberhalb der Parabel liegt, muss für alle x mit $-r \leq x \leq r$ die Ungleichung

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2} \geq ax^2$$

gelten (vgl. Abbildung L 561213 c).



L 561213 c

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$r - ax^2 \geq \sqrt{r^2 - x^2}\,. \tag{2}$$

Für $x = 0$ ist diese Ungleichung mit Gleichheit erfüllt; von jetzt ab soll daher $x \neq 0$ vorausgesetzt werden. Die rechte Seite ist nichtnegativ, also muss das auch für die linke Seite gelten, die ihr Minimum für $x = \pm r$ annimmt. Als notwendige Bedingung folgt $r - ar^2 \geq 0$, also muss

$$r \leq \frac{1}{a} \tag{3}$$

gelten. Dann sind beide Seiten nichtnegativ. Die Ungleichung (2) ist dann äquivalent zu der daraus durch Quadrieren beider Seiten entstehenden Ungleichung, die weiter äquivalent umgeformt wird:

$$\begin{aligned} r^2 - 2arx^2 + a^2x^4 &\geq r^2 - x^2\,, \\ a^2x^4 &\geq (2ar-1)x^2\,, \\ a^2x^2 &\geq 2ar - 1\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Da x beliebig nahe an null liegen kann, folgt

$$0 \geq 2ar - 1\,.$$

Wegen $a^2x^2 \geq 0$ ist aber diese Ungleichung auch umgekehrt hinreichend für die Gültigkeit von (4). Es ergibt sich demnach äquivalent $1 \geq 2ar$, d. h.

$$r \leq \frac{1}{2a}\,. \tag{5}$$

Da die Bedingung (3) ebenfalls aus (4) folgt, passt eine Eiskugel genau dann in die Waffel, wenn ihr Radius die Bedingung (5) erfüllt.

561214 Lösung *12 Punkte*

Teil a) Es sei D die Diagonale des 8×8-Quadrats, welche die linke untere mit der rechten oberen Ecke verbindet. Durch eine Spiegelung an D wird das Brett auf sich selbst abgebildet.

Es sei p eine beliebige Pflasterung. Durch die Spiegelung an D wird p in eine neue Pflasterung p' umgewandelt. Wendet man die Spiegelung an D erneut an, so entsteht aus p' wieder die ursprüngliche Pflasterung p. Dabei sind p und p' notwendigerweise verschieden, denn der Dominostein, der das linke untere Feld überdeckt, verändert bei der Spiegelung seine Position (liegt er in p horizontal, muss er in p' vertikal liegen und umgekehrt).

Also zerlegt die Diagonalenspiegelung die Menge aller Pflasterungen in disjunkte Paare, woraus folgt, dass die Anzahl aller Pflasterungen gerade sein muss.

Teil b) Im Folgenden werden die Felder des Bretts wie beim Schach üblich mit einer Zahl für die Zeile und einem Buchstaben für die Spalte bezeichnet. Die Eckfelder links unten, rechts unten und rechts oben haben also die Koordinaten a1, h1 bzw. h8; die Koordinaten aller anderen Felder ergeben sich daraus. Steine überdecken zwei Felder, zur Angabe der Koordinaten werden entweder beide Buchstaben (z. B. bc3) oder beide Zahlen (b34) angegeben.

Angenommen, es existiert eine Pflasterung ohne ein 2×2-Quadrat aus Dominosteinen. Wir werden daraus einen Widerspruch herleiten.

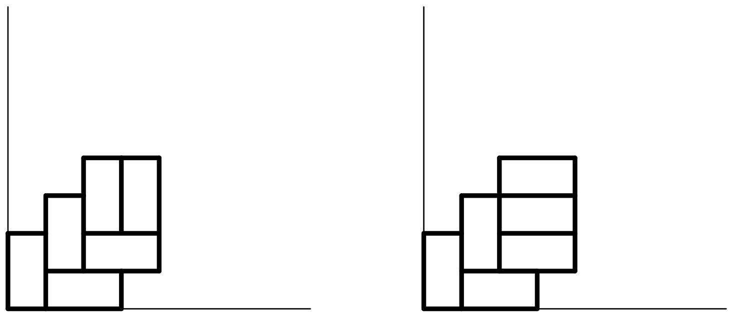
Man betrachte das Feld a1 und nehme ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit an, dass es durch einen Stein in vertikaler Lage überdeckt wird, also a12 (der andere Fall kann analog behandelt werden). Liegt der das Feld b1 überdeckende Stein ebenfalls vertikal, hätten wir mit a12 und b12 ein 2×2-Quadrat aus Dominosteinen gefunden. Also muss der b1 überdeckende Stein die horizontale Lage bc1 aufweisen.

Nun betrachte man den Stein auf dem Feld b2. Liegt er horizontal, bc2, so würde er zusammen mit dem Stein bc1 ein 2×2-Quadrat bilden; also liegt er vertikal, b23.

Setzt man diese Argumentation analog für die Felder c3, d4, ..., g7 fort, so erhält man die Steine gh6 und g78, die nur eine Möglichkeit für den das Eckfeld h8 überdeckenden Stein übrig lassen, nämlich h78. Damit erhalten wir in der rechten oberen Ecke des Bretts ein 2×2-Quadrat aus Dominosteinen im Widerspruch zur Annahme.

Also muss jede Pflasterung ein solches Quadrat enthalten.

Teil c) Die Beweisführung in Teil b) zeigt noch mehr, nämlich dass jede Pflasterung p durch eine Folge von Zügen in die Pflasterung p_1, die links unten ein 2×2-Quadrat hat, überführt werden kann. Um dies zu erreichen, fängt man beim Feld a1 an und betrachtet wie in b) die Kette von notwendigerweise abwechselnd vertikal und horizontal liegenden Dominosteinen, bis man auf das erste 2×2-Quadrat stößt (siehe Abbildung L 561214). Nach der Durchführung eines Zuges in diesem 2×2-Quadrat liegen die beiden Dominosteine parallel zu dem Dominostein, der in der Kette als letztes betrachtet wurde und zu keinem 2×2-Quadrat gehörte. Damit bildet dieser jetzt mit einem der durch den Zug gedrehten Dominosteine ein 2×2-Quadrat, das um eine Position weiter unten (wie in der Abbildung) oder weiter links liegt; dieses Quadrat tritt in der Suche in b) einen Schritt eher auf. Führt man auf diesem einen Zug aus, so ergibt sich ein neues 2×2-Quadrat, mit dem man ebenso verfährt. Nach maximal 12 dieser Züge erhält man ein 2×2-Quadrat, das das Feld a1 enthält.



L 561214

Nun schneide man dieses Quadrat aus dem Brett heraus und wiederhole das obige Argument beginnend mit dem Feld c1. Liegt der überdeckende Dominostein auf c12, so ergeben sich de1, d23, ef2, e34, fg3, f45, gh4, g56. Für h5 bleibt dann nur der Dominostein h56 übrig, der mit g56 ein 2×2-Quadrat bildet. Liegt der c1 überdeckende Stein auf cd1, so ergeben sich c23, de2, d34, ef3, e45, fg4, f56, gh5, g67, und h6 lässt sich nur durch h67 überdecken, der mit g67 ein 2×2-Quadrat bildet. Damit erhält man auch hier ein 2×2-Quadrat, das sich durch eine entsprechende Folge von Zügen nach cd12 bringen lässt.

Diese Argumentation setzt lediglich voraus, dass die beiden Nachbarfelder der linken unteren Ecke nur eine weitere Möglichkeit haben, durch einen Dominostein überdeckt zu werden, ohne ein 2×2-Quadrat zu bilden, sowie eine am rechten bzw. oberen Rand gegenüber dem kompletten Schachbrett unveränderte Situation. Sobald ein Dominostein den Rand berührt, müssen die nächsten beiden Dominosteine parallel liegen, wenn sie kein 2×2-Quadrat mit diesem bilden sollen, und bilden dann ihrerseits ein 2×2-Quadrat.

Schneidet man das Quadrat cd12 aus und fährt analog fort, ergibt sich, dass p durch eine Folge von Zügen in eine Pflasterung p_2 überführt werden kann, in der die Dominosteine das Brett in 2×2-Quadrate zerlegen. Legt man in allen diesen Quadraten die Steine horizontal, erhält man die Pflasterung h, die nur aus horizontalen Steinen besteht.

Da p beliebig war, kann man also jede Pflasterung des Schachbretts in die Pflasterung h überführen. Da außerdem jeder Zug durch Wiederholung desselben Zuges rückgängig gemacht werden kann, kann man auch h in jede vorgegebene Pflasterung p überführen, indem man die Züge, mit denen p in h umgewandelt wird, in umgekehrter Reihenfolge ausführt.

Sind also zwei beliebige Pflasterungen p und q gegeben, so kann p in q umgewandelt werden, indem man zuerst p in h und dann h in q umwandelt, was die Behauptung der Aufgabe beweist.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 561211 *Insgesamt: 10 Punkte*

Umformung des Gleichungssystems in eine Gleichung oder ein System mit leichterem Lösungszugang .... 4 Punkte
Ableitung einer endlichen Menge von Lösungen, die alle Lösungen enthält .... 3 Punkte
Probe oder Nachweis der Äquivalenz .... 3 Punkte

Aufgabe 561212 *Insgesamt: 10 Punkte*

Analyse der Lage und Feststellung des rechten Winkels bei C .... 2 Punkte
Kongruenz der Kreise k_2 und k_3, z. B. Symmetrieargument .... 2 Punkte
Kongruenz von k_1 zu diesen .... 6 Punkte

Davon:
- bei Vorgehen im Stile der ersten Lösung
  - Konstruktion von k' .... 2 Punkte
  - sorgfältige Begründung der Kongruenz .... 4 Punkte
- bei Berechnung der beiden Radien
  - Berechnung von r_1 .... 3 Punkte
  - Berechnung von r_2 .... 3 Punkte

Aufgabe 561213 *Insgesamt: 10 Punkte*

Aufstellen der Kreisgleichung .... 3 Punkte
Übersetzen der Aufgabenstellung in eine Gleichung oder Ungleichung zwischen Kreis und Parabel .... 2 Punkte
Weitere Umformungen bis zur Bedingung $r \leq 1/(2a)$, korrekte Formulierung des Ergebnisses .... 5 Punkte

Teil a) .... 3 Punkte

bei einem Vorgehen im Sinne des Lösungsvorschlages:

Beschreibung einer geeigneten Abbildung
der Gesamtmenge der Pflasterungen auf sich selbst .... 1 Punkt

Nachweis der Bijektivität dieser Abbildung .... 1 Punkt

Nachweis, dass diese Abbildung keine Pflasterung auf sich selbst abbildet .... 1 Punkt

Teil b) .... 3 Punkte

bei einem Vorgehen im Sinne des Lösungsvorschlages:

Ansatz für indirekten Beweis .... 1 Punkt

Schluss von der Überdeckung eines Feldes (z. B. a1)
auf die eines diagonal benachbarten Feldes (z. B. b2) .... 1 Punkt

Herleitung des Widerspruches beim Erreichen des Randes .... 1 Punkt

Teil c) .... 4 Punkte

bei einem Vorgehen im Sinne des Lösungsvorschlages:

Rückführung auf den Fall eines $2{\times}2$-Quadrates in einer Ecke .... 1 Punkt

Ausschneiden und Wiederholung des Vorgehens auf dem restlichen Brett
bis zu einer ausgezeichneten Pflasterung (wie h) .... 2 Punkte

Schluss auf Überführbarkeit beliebiger Pflasterungen ineinander .... 1 Punkt