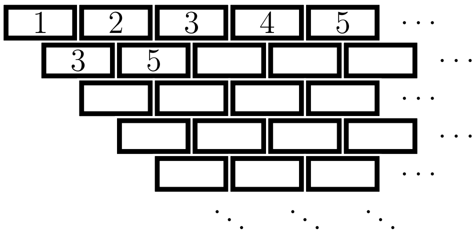
# 56. Mathematik-Olympiade
## 2. Stufe (Regionalrunde)
## Olympiadeklasse 9
## Aufgaben



Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

### 560921

In der abgebildeten Zahlenmauer sind in der obersten Zeile (Zeile 1) nacheinander die positiven ganzen Zahlen eingetragen. In den übrigen Feldern steht jeweils die Summe der Zahlen aus den beiden oberhalb angrenzenden Feldern.




a) Geben Sie die Zahlen an, die in den ersten drei Feldern der fünften Zeile dieser Zahlenmauer stehen. Ein Nachweis ist hier nicht erforderlich.

Wir denken uns die Zahlenmauer unendlich weit nach rechts und nach unten fortgesetzt und wie beschrieben mit Zahlen befüllt.

b) Bestimmen Sie die Zahlen, die in den Zeilen zwei und drei jeweils an der 2016. Stelle dieser Zahlenmauer stehen.

c) Wie oft kommt die Zahl 56 in der gesamten Zahlenmauer vor?

Begründen Sie in Teil b) und c) jeweils Ihre Antwort.

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

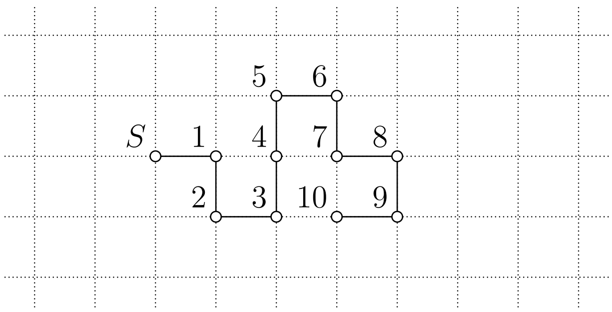
560922

Ein Metallsieb für Komposterde besteht aus einem quadratischen Gitter aus senkrecht und waagerecht gespannten Drähten. Die Gitterlinien bilden dabei quadratische Kästchen wie in der Abbildung A 560922 dargestellt.

Forscher haben untersucht, wie sich Ameisen verhalten, wenn man sie auf diesem Gitter aussetzt. Dazu haben sie folgendes Experiment mehrfach wiederholt:

> Eine Ameise wird an einem inneren Gitterpunkt, dem Startpunkt $S$, weit genug vom Rand des Metallsiebs entfernt ausgesetzt. Die Ameise kann nur entlang der Gitterlinien laufen. In jedem Gitterpunkt entscheidet sich die Ameise neu, in welche Richtung sie ihren Weg fortsetzt.
> Die Forscher interessieren sich, welche Art von Wegen die Ameisen dabei mit welcher Wahrscheinlichkeit wählen.

Ein möglicher Weg einer Ameise vom Startpunkt $S$ über 9 weitere Gitterpunkte bis zum Ende im Gitterpunkt 10 ist in der Abbildung A 560922 dargestellt.




A 560922

Die Forscher haben auf Grund umfangreicher Untersuchungen folgendes Modell für das Verhalten der Ameisen aufgestellt:

- Alle Ameisen verhalten sich gleich.
- Eine Ameise läuft in einer Sekunde eine Kästchenlänge ab.
- An einem Gitterpunkt laufen die Ameisen mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{5}$ weiter geradeaus.
- Biegen Ameisen an einem Gitterpunkt ab, so erfolgt das mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links wie nach rechts.
- Es kommt nicht vor, dass eine Ameise an einem Gitterpunkt umkehrt und auf dem Gitterstück weiterläuft, von dem sie gerade hergekommen ist.

Ermitteln Sie auf der Basis dieses Modells die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

a) Eine Ameise geht dreimal hintereinander geradeaus.

b) Eine Ameise läuft in 6 Sekunden genau die Umfangslinie eines Rechtecks genau einmal ab (und kehrt dabei zum Startpunkt zurück).

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

560923

Wir untersuchen die Gleichungen

$$a + b = 2 \tag{1}$$

$$\text{und} \quad \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{4}{3}\,. \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass das Paar $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ keine gemeinsame Lösung der Gleichungen (1) und (2) ist.

b) Geben Sie eine gemeinsame Lösung $(a, b)$ beider Gleichungen an.

c) Bestimmen Sie alle Paare $(a, b)$ rationaler Zahlen, die gemeinsame Lösung der Gleichungen (1) und (2) sind.

560924

Gegeben sind vier Stangen, die an ihren Enden durch Gelenke beweglich miteinander zu einem konvexen Viereck (einem *Gelenkviereck*) verbunden sind.

a) Bestimmen Sie den größten Flächeninhalt, den ein solches Gelenkviereck haben kann, wenn zwei seiner Stangen die Länge 6 und die beiden anderen die Länge 8 haben.

b) Beweisen Sie, dass im allgemeinen Fall der Flächeninhalt $F$ des Vierecks die Ungleichung

$$F \leq \frac{a\,b + c\,d}{2}$$

erfüllt. Hierbei bezeichnen $a$, $b$, $c$ und $d$ die Längen der Stangen (in dieser Reihenfolge).

*Hinweis:* Ein Viereck heißt konvex, wenn beide Diagonalen innerhalb des Vierecks liegen.