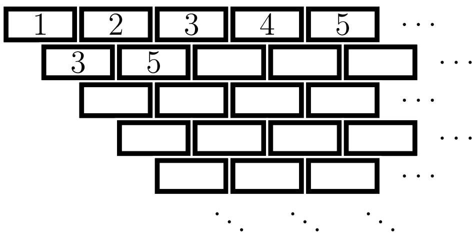
**56. Mathematik-Olympiade**
**2. Stufe (Regionalrunde)**
**Olympiadeklasse 10**
**Aufgaben**



Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

561021

In der abgebildeten Zahlenmauer sind in der obersten Zeile (Zeile 1) nacheinander die positiven ganzen Zahlen eingetragen. In den übrigen Feldern steht jeweils die Summe der Zahlen aus den beiden oberhalb angrenzenden Feldern.




a) Geben Sie die Zahlen an, die in den ersten drei Feldern der fünften Zeile dieser Zahlenmauer stehen. Ein Nachweis ist hier nicht erforderlich.

Wir denken uns die Zahlenmauer unendlich weit nach rechts und nach unten fortgesetzt und wie beschrieben mit Zahlen befüllt.

b) Bestimmen Sie die Zahlen, die in den Zeilen zwei und drei jeweils an der 2016. Stelle dieser Zahlenmauer stehen.

c) Wie oft kommt die Zahl 2016 in der gesamten Zahlenmauer vor?

Begründen Sie in Teil b) und c) jeweils Ihre Antwort.

561022

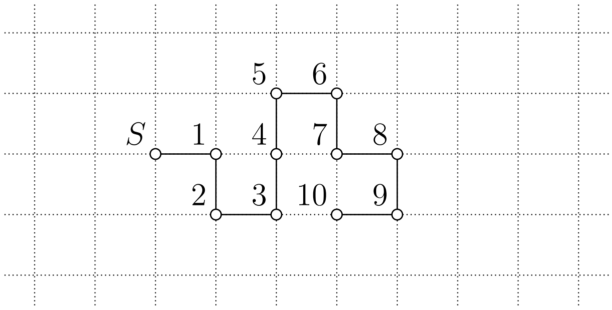
Ein Metallsieb für Komposterde besteht aus einem quadratischen Gitter aus senkrecht und waagerecht gespannten Drähten. Die Gitterlinien bilden dabei quadratische Kästchen wie in der Abbildung A 561022 dargestellt.

Forscher haben untersucht, wie sich Ameisen verhalten, wenn man sie auf diesem Gitter aussetzt. Dazu haben sie folgendes Experiment mehrfach wiederholt:

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

Eine Ameise wird an einem inneren Gitterpunkt, dem Startpunkt $S$, weit genug vom Rand des Metallsiebs entfernt ausgesetzt. Die Ameise kann nur entlang der Gitterlinien laufen. In jedem Gitterpunkt entscheidet sich die Ameise neu, in welche Richtung sie ihren Weg fortsetzt.
Die Forscher interessieren sich, welche Art von Wegen die Ameisen dabei mit welcher Wahrscheinlichkeit wählen.

Ein möglicher Weg einer Ameise vom Startpunkt $S$ über 9 weitere Gitterpunkte bis zum Ende im Gitterpunkt 10 ist in der Abbildung A 561022 dargestellt.




A 561022

Die Forscher haben auf Grund umfangreicher Untersuchungen folgendes Modell für das Verhalten der Ameisen aufgestellt:

– Alle Ameisen verhalten sich gleich.
– Eine Ameise läuft in einer Sekunde eine Kästchenlänge ab.
– An einem Gitterpunkt laufen die Ameisen mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{5}$ weiter geradeaus.
– Biegen Ameisen an einem Gitterpunkt ab, so erfolgt das mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links wie nach rechts.
– Es kommt nicht vor, dass eine Ameise an einem Gitterpunkt umkehrt und auf dem Gitterstück weiterläuft, von dem sie gerade hergekommen ist.

Ermitteln Sie auf der Basis dieses Modells die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

a) Eine Ameise geht dreimal hintereinander geradeaus.
b) Eine Ameise läuft in 8 Sekunden genau die Umfangslinie eines Rechtecks genau einmal ab (und kehrt dabei zum Startpunkt zurück).

561023

Der Graph der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 + 2\,a\,x - 3 + b^2$ schneide die $x$-Achse in zwei unterschiedlichen Punkten $A$ und $B$ und die $y$-Achse in einem von $A$ und $B$ verschiedenen Punkt $C$.

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt $F$ und den Umfang $u$ des Dreiecks $ABC$, wenn $a = 1$ und $b = 0$ vorausgesetzt wird.
b) Weisen Sie nach, dass das Dreieck $ABC$ für $a = 6$ und $b = \sqrt{2}$ rechtwinklig ist.
c) Ermitteln Sie alle möglichen Paare $(a, b)$ reeller Zahlen, für die das Dreieck $ABC$ rechtwinklig ist.

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

561024

Gegeben sind zwei positive rationale Zahlen $a$ und $b$ mit $a+b=2$. In dieser Aufgabe soll die Ungleichung

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{3+a}+\frac{2}{3+b}$$

untersucht werden.

a) Gibt es positive rationale Zahlen $a$ und $b$, für welche die Werte der linken und der rechten Seite der Ungleichung gleich sind?

b) Beweisen Sie die Gültigkeit der Ungleichung.