56. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 6
Lösungen

© 2016 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

560621 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Die Summe der Zahlen in einer Diagonalen beträgt 10 (Bedingung (2)) und die Summe der Zahlen in der anderen Diagonalen beträgt 7 (Bedingung (3)). Addiert man die Summen beider Diagonalen, erhält man $(10+7=)\,17$. Dieses entspricht der Summe $A+B+C+D+E+E$. Dann folgt mit Bedingung (1), dass $E+E=17-13=4$ und damit $E=2$ ist.

Lösungsvariante:

Nach Aufgabenstellung gilt

(1) $A+B+C+D=13$,
(2) $A+E+C \quad = 10$,
(3) $B+E+D \quad = 7$.

Durch Addition der beiden Seiten der Gleichungen (2) und (3) folgt

(4) $A+B+C+D+2E=17$.

Durch Einsetzen von (1) in (4) folgt $13+2E=17$.

Wegen $13+4=17$ folgt $2E=4$ und hieraus $E=2$.

Teil b) Eine mögliche Lösung ist: $A=3$, $B=1$, $C=5$, $D=4$, $E=2$, denn $A+B+C+D=3+1+5+4=13$ und $A+E+C=3+2+5=10$ und $B+E+D=1+2+4=7$.

Hinweis: Jede der angegebenen Lösungen aus d) ist hier richtig.

Teil c) Wenn $E=2$ ist, folgt aus Bedingung (2) $A+C=8$ und aus Bedingung (3) $B+D=5$.
Laut Aufgabenstellung dürfen B und D nicht Null sein. Außerdem sollen alle Zahlen voneinander verschieden sein, womit B und D auch nicht 2 sein können. Es bleiben die Zahlen 1 und 4 für B und D übrig mit $1+4=5$.
Dann können A und C nicht mehr 1, 2 oder 4 sein und es bleibt nur die Möglichkeit der Zerlegung $8=3+5$, also A und C sind 3 oder 5.
Man kann nun die Zahlen für A und C ebenso vertauschen wie für B und D und erhält alle möglichen vier Lösungen:

A	B	C	D	E
3	1	5	4	2
3	4	5	1	2
5	1	3	4	2
5	4	3	1	2

Teil d) Wenn auch die Zahl Null als Lösungszahl möglich ist, dann können die Summen $B + D$ und $A + C$ auf folgende Weise in zwei Summanden zerlegt werden:

(1) $B+D = 1+4$ und $A+C = 0+8$; durch Vertauschen erhält man vier Lösungen;

(2) $B+D = 1+4$ und $A+C = 3+5$; durch Vertauschen erhält man wieder vier Lösungen;

(3) $B+D = 0+5$ und $A+C = 1+7$; durch Vertauschen erhält man noch einmal vier Lösungen.

Das sind insgesamt 12 Lösungen; weitere Lösungen gibt es nicht.

A	B	C	D	E
0	1	8	4	2
0	4	8	1	2
8	1	0	4	2
8	4	0	1	2
3	1	5	4	2
3	4	5	1	2
5	1	3	4	2
5	4	3	1	2
1	0	7	5	2
1	5	7	0	2
7	0	1	5	2
7	5	1	0	2

560622 Lösung *10 Punkte*

Teil a) In 45 Achtern sitzen $(45 \cdot 9 =)\,405$ Sportler, also gehören $(1020 - 405 =)\,615$ Sportler in die Viererboote. Da jedes dieser Boote mit fünf Sportlern fährt, wurden $(615 : 5 =)\,123$ Vierer gemeldet.

Teil b) Laut Aufgabenstellung sind ein Boot weniger und drei Sportler mehr als gemeldet am Start. Wenn man zwei Vierer durch einen Achter ersetzt, so sinkt die Bootsanzahl um 1, die Teilnehmerzahl sinkt ebenfalls um $(2 \cdot 5 - 9 =)\,1$. Wenn man aber drei Vierer durch zwei Achter ersetzt, so sinkt die Bootsanzahl wiederum um 1, die Teilnehmeranzahl aber steigt um $(2 \cdot 9 - 3 \cdot 5 =)\,3$, wie angegeben.

560623 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Q bezeichne den Flächeninhalt und a die Seitenlänge des Quadrats. Für den Flächeninhalt eines Quadrates gilt: $Q = a^2$. Des Weiteren gilt für den Umfang $u = 4a$ bzw. $a = \frac{1}{4}u$. Die Seitenlänge a beträgt deshalb $(48\,\text{cm} : 4 =)\,12\,\text{cm}$. Somit beträgt der Flächeninhalt des Quadrates $(12^2\,\text{cm}^2 =)\,144\,\text{cm}^2$.

Teil b) Die Flächeninhalte der Rechtecke A, B, C und D betragen jeweils $(144\,\text{cm} : 4 =)\,36\,\text{cm}^2$.

Teil c) Da das Rechteck A einen Flächeninhalt von $36\,\text{cm}^2$ hat und eine seiner Seiten die Länge $12\,\text{cm}$ aufweist (denn diese Seite ist eine Seite des Quadrats), hat die andere Seite die Länge $(36\,\text{cm}^2 : 12\,\text{cm} =)\,3\,\text{cm}$.

Der Umfang des Rechtecks A ist dann $(2 \cdot 12\,\text{cm} + 2 \cdot 3\,\text{cm} =)\,30\,\text{cm}$.

Teil d) Die senkrechten Seiten der Rechtecke B und C sind gleich groß, da die beiden Rechtecke flächengleich sind und die Länge ihrer waagerechten Seiten übereinstimmt. Da die Summe der beiden senkrechten Seiten $(12\,\text{cm} - 3\,\text{cm} =)\,9\,\text{cm}$ beträgt, ist die Länge der senkrechten Seite des Rechtecks B $(9\,\text{cm} : 2 =)$ 4,5 cm.

Da die Fläche des Rechtecks B $36\,\text{cm}^2$ beträgt, hat seine waagerechte Seite die Länge ($36\,\text{cm}^2 : 4{,}5\,\text{cm} =$) $8\,\text{cm}$.

Folglich ist der Umfang des Rechtecks B ($2 \cdot 8\,\text{cm} + 2 \cdot 4{,}5\,\text{cm} =$) $25\,\text{cm}$.

<u>560624 Lösung</u> *10 Punkte*

Teil a) Für jede der drei Zahlen aus der obersten Zeile gibt es zwei mögliche Zahlen aus der zweiten Zeile, die fehlende Zahl aus der dritten Zeile ist dann fest. Also gibt es ($3 \cdot 2 \cdot 1 =$) 6 verschiedene Möglichkeiten.

Es sind (1, 5, 9), (1, 6, 8), (2, 4, 9), (2, 6, 7), (3, 4, 8) und (3, 5, 7).

Teil b) Die Summe der Zahlen im (3×3)-Felder-Quadrat beträgt ($1 + 2 + \cdots + 9 =$) 45. Jede der Zahlen 1 bis 9 kommt in den verschiedenen Möglichkeiten ($2 \cdot 1 =$) 2-mal vor. Folglich ergibt sich als Summe aller ausgewählten Zahlen ($2 \cdot 45 =$) 90.

Natürlich kann man die Summe auch durch einfache Addition aller Zahlen in den oben genannten Tripeln erhalten.

Teil c) Die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten beträgt ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$) 24.

Für jede der vier Zahlen aus der obersten Zeile gibt es drei mögliche Zahlen aus der zweiten Zeile und zwei mögliche Zahlen aus der dritten Zeile. Die fehlende Zahl aus der vierten Zeile steht dann fest.

Teil d) Die Zahlen in der 1. Reihe sind $0+1, 0+2, 0+3, 0+4$, in der 2. Reihe $4+1, 4+2, 4+3$ und $4+4$, in der 3. Reihe $8+1, 8+2, 8+3$ und $8+4$ und in der vierten Reihe $12+1, 12+2, 12+3$ und $12 + 4$. Wenn man die vier Zahlen der Vorschrift gemäß auswählt, so erhält man immer als Summe $(0+4+8+12)+(1+2+3+4) = 34$. Die erste Klammer bezieht sich dabei darauf, dass aus jeder Zeile eine Zahl ausgewählt werden soll, die zweite darauf, dass aus jeder Spalte eine Zahl ausgewählt werden soll. Die gesuchte Summe beträgt also 34.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 560621	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	3 Punkte
Korrektes Ergebnis	2 Punkte
Herleitung oder Probe	1 Punkt
Teil b)	2 Punkte
Korrektes Ergebnis	1 Punkt
Herleitung oder Probe	1 Punkt
Teil c)	3 Punkte
Vollständige Lösung	2 Punkte
Herleitung / erkennbare Systematik	1 Punkt
Teil d)	2 Punkte
Korrektes Ergebnis	1 Punkt
Herleitung / erkennbare Systematik	1 Punkt

Aufgabe 560622	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	4 Punkte
Korrektes Ergebnis	2 Punkte
Herleitung	2 Punkte
Teil b)	6 Punkte
Korrektes Ergebnis	3 Punkte
Herleitung	3 Punkte

Aufgabe 560623		*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)		3 Punkte
	Korrekte Angabe von Seitenlänge und Flächeninhalt	2 Punkte
	Herleitung	1 Punkt
Teil b)	Korrektes Ergebnis	1 Punkt
Teil c)		3 Punkte
	Korrekte Angabe des Umfangs	1 Punkt
	Herleitung	2 Punkte
Teil d)		3 Punkte
	Korrekte Angabe des Umfangs	1 Punkt
	Herleitung	2 Punkte

Aufgabe 560624		*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)		3 Punkte
	Vollständige Angabe der 6 Möglichkeiten	2 Punkte
	Begründung / Herleitung	1 Punkt
Teil b)	Begründung	2 Punkte
Teil c)		3 Punkte
	Angabe der Anzahl	1 Punkt
	Begründung / Herleitung	2 Punkte
Teil d)	Korrektes Ergebnis	2 Punkte