56. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 8
Lösungen

560821 Lösung *10 Punkte*

Nehmen wir zunächst an, dass die Autos in entgegengesetzten Richtungen fahren. Sie fahren zum Zeitpunkt 0 aneinander vorbei. Es sei x die Maßzahl des in Metern gemessenen Weges, die das rote Auto zurücklegt, bis die Autos erstmals wieder aneinander vorbeifahren. Nach Aufgabenstellung werden hierfür 10 Sekunden benötigt. In dieser Zeit legt das blaue Auto $12 - x$ Meter zurück, da die Bahn 12 Meter lang ist. In 50 Sekunden legt daher das rote Auto $5 \cdot x$ Meter, das blaue Auto $(5 \cdot (12 - x) =)\ 60 - 5 \cdot x$ Meter zurück.

Da andererseits bei gleicher Fahrtrichtung das blaue Auto das rote nach 50 Sekunden überholt, fährt das blaue Auto in 50 Sekunden 12 Meter mehr als das rote, da die Bahn 12 Meter lang ist und das blaue Auto beim ersten Überholen genau eine Runde mehr als das rote Auto gefahren ist. Wir erhalten demnach die Gleichung

$$60 - 5 \cdot x = 5 \cdot x + 12\,.$$

Auflösen nach x ergibt $10 \cdot x = 48$, $x = 4{,}8$ und schließlich $12 - x = 7{,}2$.

Folglich gilt: Das rote Auto fährt in 10 Sekunden 4,8 Meter, das blaue 7,2 Meter. Das rote Auto hat eine Geschwindigkeit von 0,48 Metern pro Sekunde, das blaue eine von 0,72 Metern pro Sekunde.

Lösungsvariante: Wir bezeichnen mit v_b die Geschwindigkeit des blauen Autos und mit v_r die Geschwindigkeit des roten Autos.

Wir betrachten zuerst die Situation, dass die beiden Autos gerade nebeneinander sind, aber in entgegengesetzten Richtungen fahren. Dann sind $v_b \cdot 10\,\mathrm{s}$ und $v_r \cdot 10\,\mathrm{s}$ die von den beiden Autos in den 10 Sekunden bis zur ersten Wiederbegegnung zurückgelegten Wege. Da die Bahn 12 Meter lang ist, muss $v_b \cdot 10\,\mathrm{s} + v_r \cdot 10\,\mathrm{s} = 12\,\mathrm{m}$ gelten. Hieraus folgt

$$v_b + v_r = 1{,}2\,\mathrm{m/s}\,. \tag{1}$$

Wir betrachten nun die Situation, dass die beiden Autos gerade nebeneinander sind, aber in gleicher Richtung fahren. Dann muss das blaue Auto genau eine Runde mehr als das rote Auto bis zur ersten Wiederbegegnung fahren. Da die Bahn 12 Meter lang ist, das blaue Auto hierfür 50 Sekunden braucht und seine Überholgeschwindigkeit $v_b - v_r$ ist, gilt

$$v_b - v_r = \frac{12\,\mathrm{m}}{50\,\mathrm{s}} = 0{,}24\,\mathrm{m/s}\,. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt durch Addition $2 \cdot v_b = 1{,}2\,\mathrm{m/s} + 0{,}24\,\mathrm{m/s} = 1{,}44\,\mathrm{m/s}$ und daher $v_b = 0{,}72\,\mathrm{m/s}$. Hieraus und aus (1) folgt $v_r = 0{,}48\,\mathrm{m/s}$.

Folglich gilt: Das rote Auto hat eine Geschwindigkeit von 0,48 Metern pro Sekunde, das blaue Auto eine Geschwindigkeit von 0,72 Metern pro Sekunde.

560822 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Wir geben den Stühlen reihum die Nummern 1, 2, 3, 4, 5 und 6. Da alle sechs Personen an dem Tisch Platz nehmen, muss Frau Weber einen der sechs Stühle wählen. Da Sitzordnungen, die durch Drehung auseinander hervorgehen, als gleich betrachtet werden, können wir davon ausgehen, dass Frau Weber auf dem Stuhl mit der Nummer 1 sitzt. Herr Weber kann nun links oder rechts von ihr sitzen. Da Sitzordnungen, die durch Spiegelung auseinander hervorgehen, als gleich betrachtet werden, können wir davon ausgehen, dass Herr Weber auf dem Stuhl mit der Nummer 2 sitzt. Weitere Drehungen oder Spiegelungen müssen nicht betrachtet werden, da sie die Position von Frau Weber oder Herrn Weber ändern würden.

Das Ehepaar Schulz kann nun nur entweder auf den Stühlen mit den Nummern 3 und 4 oder auf den Stühlen mit den Nummern 5 und 6 sitzen. Dafür gibt es genau 2 Möglichkeiten zur Auswahl. Das Ehepaar Schulz kann nun noch entscheiden, ob die Ehefrau links oder rechts neben dem Ehemann sitzt, was wieder genau 2 Möglichkeiten ergibt. Das Ehepaar Meier sitzt auf den von den anderen beiden Ehepaaren nicht genutzten Plätzen, wobei auch sie nur noch entscheiden müssen, ob die Ehefrau links oder rechts neben dem Ehemann sitzt, was wieder genau 2 Möglichkeiten ergibt.

Insgesamt gibt es also genau $(2 \cdot 2 \cdot 2 =)$ 8 mögliche Sitzordnungen, wenn die Sitzordnungen, die durch Drehen oder Spiegeln auseinander hervorgehen, als gleich gelten.

Teil b) Da alle sechs Personen an dem Tisch Platz nehmen, muss Frau Weber einen der sechs Stühle wählen. Sie hat dafür genau 6 Möglichkeiten zur Auswahl. Da Herr Weber neben ihr sitzen soll, hat er genau 2 Möglichkeiten zur Auswahl. Für Herrn und Frau Weber gibt es also $(6 \cdot 2 =)$ 12 Möglichkeiten, Platz zu nehmen.

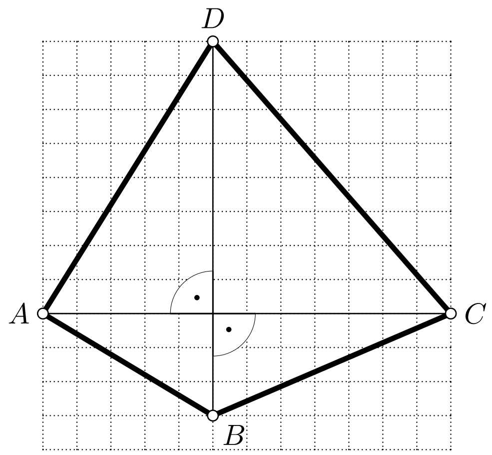
Haben Frau und Herr Weber sich für zwei bestimmte Stühle entschieden, dann haben die Ehepaare Schulz und Weber wie in Teil a) noch jeweils genau $(2 \cdot 2 \cdot 2 =)$ 8 Möglichkeiten der Platzierung.

Insgesamt gibt es also genau $(12 \cdot 8 =)$ 96 mögliche Sitzordnungen, wenn auch die Sitzordnungen, die durch Drehen oder Spiegeln auseinander hervorgehen, als verschieden gelten.

560823 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Die Diagonale $\overline{AC}$ teilt das Viereck $ABCD$ in die beiden Dreiecke ABC und ACD, siehe Abbildung L 560823 a. Beide Dreiecke haben die Grundseite $\overline{AC}$ mit der Länge $|AC| = 12\,\text{cm}$ gemeinsam. Die im Dreieck ACD zur Grundseite $\overline{AC}$ zugehörende Höhe ist nach der Abbildung in der Aufgabenstellung 8 cm lang und die im Dreieck ABC zur Grundseite $\overline{AC}$ gehörende Höhe ist nach der Abbildung in der Aufgabenstellung 3 cm lang. Hieraus folgt für den Flächeninhalt A_{ABCD} des Vierecks $ABCD$

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{ABCD} &= \mathrm{A}_{ABC} + \mathrm{A}_{ACD}\\ &= \frac{1}{2} \cdot 12\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} + \frac{1}{2} \cdot 12\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm}\\ &= 66\,\text{cm}^2\,.\end{aligned}$$

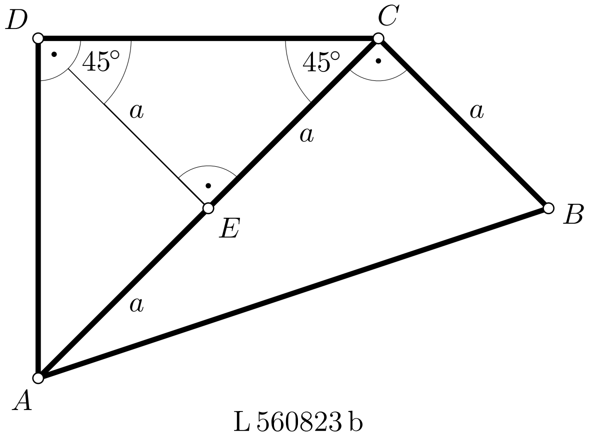


L 560823 a

Der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ ist $66\,\text{cm}^2$.

Teil b) Es sei a die Länge der Seite $\overline{BC}$. Nach Voraussetzung gilt dann $|AC| = 2 \cdot a$. Da die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ nach Aufgabenstellung aufeinander senkrecht stehen und die Längen a und $2a$ haben, gilt $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2 \cdot a$ für den Flächeninhalt A_{ABC} des Dreiecks ABC, also

$$A_{ABC} = a^2 \,. \tag{1}$$



L 560823 b

Es sei E der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$, siehe Abbildung L 560823 b. Da das Dreieck ACD nach Aufgabenstellung gleichschenklig-rechtwinklig mit der Basis $\overline{AC}$ ist, gelten $|\sphericalangle ADC| = 90°$ und nach Innenwinkel- und Basiswinkelsatz $|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle DCA| = 45°$. Weiter ist daher die Strecke $\overline{DE}$ die Höhe zur Seite $\overline{AC}$ des Dreiecks ACD, weswegen $|\sphericalangle CED| = 90°$ und nach dem Innenwinkelsatz $|\sphericalangle EDC| = 45°$ folgen. Nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes und wegen $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle DCE| = 45°$ folgt

$$|DE| = |CE| = \frac{1}{2} \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a = a \,.$$

Für den Flächeninhalt A_{ACD} des Dreiecks ACD folgt hieraus

$$A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a \cdot a = a^2 \,. \tag{2}$$

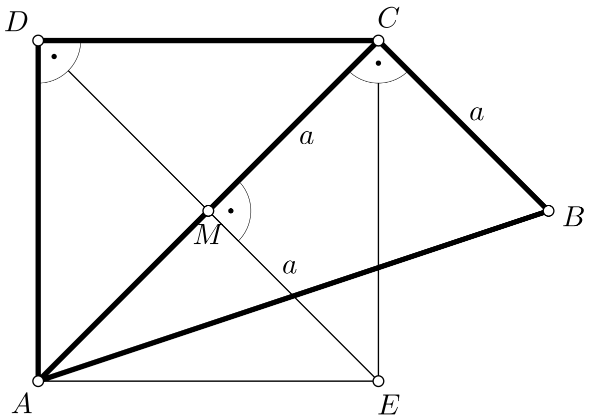
Aus (1) und (2) folgt $A_{ACD} = A_{ABC}$. Deshalb hat Rolf Recht und Timo und Sven haben nicht Recht.

Lösungsvariante zu Teil b) Nach der Aufgabenstellung gelten:

(1) $|\sphericalangle ACB| = 90°$.
(2) $|AC| = 2 \cdot |BC|$.
(3) $|\sphericalangle ADC| = 90°$, $|AD| = |CD|$.

Es sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$. Es sei a die Länge der Seite $\overline{BC}$. Wegen (2) gelten dann $|AC| = 2a$ und

$$|CM| = a \,. \tag{4}$$



L 560823 c

Es sei E der Bildpunkt des Punktes D bei Spiegelung an der Geraden AC, siehe Abbildung L 560823 c. Wegen dieser Spiegelung sind die Dreiecke ACD und AEC kongruent zueinander. Hieraus folgt

$$A_{ACD} = A_{AEC} \,. \tag{5}$$

Wegen der Kongruenz der Dreiecke ACD und AEC und aus (3) folgt, dass das Viereck $AECD$ vier gleich lange Seiten hat, also ein Rhombus ist, und in den Eckpunkten D und E rechte Innenwinkel hat. Folglich ist $AECD$ ein Quadrat, weswegen seine Diagonalen gleich lang sind, einander halbieren und aufeinander senkrecht stehen. Wegen (1), (2) und (4) folgen hieraus

$$|EM| = |CM| = |BC| = a \tag{6}$$

und

$$|\sphericalangle EMC| = |\sphericalangle MCB| = 90^\circ\,. \tag{7}$$

Daher haben die Dreiecke ABC und AEC die gleiche Grundlinie und gleich lange Höhen $\overline{BC}$ und $\overline{EM}$. Hieraus folgt

$$\mathrm{A}_{ABC} = \mathrm{A}_{AEC}. \tag{8}$$

Aus (5) und (8) folgt $\mathrm{A}_{ACD} = \mathrm{A}_{ABC}$. Folglich hat Rolf Recht und Timo und Sven haben nicht Recht.

<u>560824 Lösung</u> *10 Punkte*

I. Es seien a und b positive ganze Zahlen mit

$$5 \cdot a + 6 \cdot b + 56 = a \cdot b\,. \tag{1}$$

Aus der Gleichung (1) folgt $5 \cdot a + 56 = b \cdot (a-6)$. Hieraus folgt $5 \cdot (a-6) + 5 \cdot 6 + 56 = b \cdot (a-6)$ und daher

$$5 \cdot (a-6) + 86 = b \cdot (a-6)\,. \tag{2}$$

Da a eine positive Zahl ist, ist die linke Seite der Gleichung (2) größer als $5 \cdot (-6) + 86 = 56$. Da b auch positiv ist, muss daher $a > 6$ gelten. Da a und b ganze Zahlen sind, ist die rechte Seite der Gleichung (2) durch $a-6$ teilbar. Da auch $5 \cdot (a-6)$ durch $a-6$ teilbar ist, muss auch 86 durch $a-6$ teilbar sein. Folglich kann $a-6$ nur ein positiver Teiler von 86 sein. Da 86 die Primfaktorenzerlegung $86 = 2 \cdot 43$ besitzt, muss daher $a - 6 \in \{1, 2, 43, 86\}$, also $a \in \{7, 8, 49, 92\}$, gelten. Durch Einsetzen dieser Werte für a in die Gleichung (2) und Auflösen nach b folgt:

Wenn ein Paar (a, b) positiver ganzer Zahlen der Gleichung (1) genügt, dann kann es nur eines der Paare

$$(7, 91)\,, \quad (8, 48)\,, \quad (49, 7)\,, \quad (92, 6) \tag{3}$$

sein.

II. Offenbar sind die in (3) genannten Zahlenpaare Paare ganzer positiver Zahlen. Wie man durch Einsetzen leicht sieht, genügen sie auch alle der Gleichung (1).

Aus I. und II. folgt, dass die in (3) genannten Paare alle Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen sind, für die die Gleichung (1) gilt.

Hinweis auf eine Lösungsvariante: Aus der Gleichung (1) kann man auch $5 \cdot a + 56 = b \cdot (a-6)$, da a und b positiv sind, hieraus $a - 6 > 0$ und

$$b = \frac{5 \cdot a + 56}{a-6} = \frac{5 \cdot (a - 6 + 6) + 56}{a-6} = 5 + \frac{86}{a-6}$$

folgern. Da a und b ganze Zahlen sind und $a - 6 > 0$ gilt, muss $a - 6$ einer der positiven Teiler 1, 2, 43 und 86 von 86 sein.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 560821 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Terme für die zurückgelegten Wege beider Autos bei gleicher bzw. bei entgegengesetzter Richtung .... 4 Punkte
Aufstellen und Lösen einer entsprechenden Gleichung .... 4 Punkte
Angabe der Geschwindigkeit für jedes Auto .... 2 Punkte

Aufgabe 560822 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) Prinzipiell geeigneter Lösungsansatz .... 1 Punkt
Begründete Herleitung .... 4 Punkte
Korrektes Ergebnis .... 1 Punkt
Teil b) Begründete Herleitung .... 3 Punkte
Korrektes Ergebnis .... 1 Punkt

Aufgabe 560823 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) Zeichnung mit Teilflächen .... 1 Punkt
Berechnung des Flächeninhalts des Vierecks $ABCD$ .... 3 Punkte
Teil b) Zeichnung mit Teilflächen .... 1 Punkt
Berechnung und Vergleich der Flächeninhalte .... 5 Punkte

Aufgabe 560824 — *Insgesamt: 10 Punkte*

I. Aufstellen der Einzelbedingungen für a und b .... 4 Punkte
Korrekte Herleitung der Paarbildungen .... 3 Punkte
II. Probe .... 2 Punkte
Ergebnis .... 1 Punkt