56. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 9
Lösungen

560921 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Die ersten drei Zahlen in Zeile fünf sind 48, 64 und 80.

1	2	3	4	5	…
3	5	7	9	11	…
8	12	16	20	…	
20	28	36	44	…	
48	64	80	…		
⋱	⋱	⋱			

Teil b) Man berechnet die k-te Zahl in der Zeile z, indem man die k-te und die $(k+1)$-te Zahl aus der Zeile $z-1$ addiert. Damit ergibt sich als 2016. Zahl in Zeile zwei: $2016+2017=4033$. Um die 2016. Zahl in der dritten Zeile zu ermitteln, benötigt man die 2016. und die 2017. Zahl aus Zeile zwei. An der 2017. Stelle der zweiten Zeile steht die Zahl $2017+2018=4035$. Damit ist $4033+4035=8068$ die 2016. Zahl in Zeile drei.

Teil c) Werden die Zahlen einer Zeile von links nach rechts größer, so werden auch die Summen zweier benachbarter Zahlen dieser Zeile größer. Damit gilt für die Zahlen der folgenden Zeile, dass sie von links nach rechts ebenfalls größer werden.

In der ersten Zeile sind die Zahlen so geordnet, dass sie größer werden, damit ergibt sich, dass in allen Zeilen der Zahlenmauer die Zahlen von links nach rechts größer werden. Damit kann die 56 höchstens einmal pro Zeile vorkommen. Des Weiteren ist die Zahl an der k-ten Stelle einer Zeile z stets größer als die Zahl an der k-ten Stelle der vorangegangenen Zeile.

In Zeile zwei steht an der k-ten Stelle die Summe

$$k+(k+1)=2\,k+1\,. \tag{1}$$

Damit stehen in dieser Zeile die ungeraden Zahlen, weshalb 56 nicht in Zeile zwei enthalten ist.

Die k-te Zahl der dritten Zeile ergibt sich wegen (1) aus der Summe

$$(2\,k+1)+(2\,(k+1)+1)=4\cdot k+4=4\cdot(k+1)\,. \tag{2}$$

In dieser Zeile stehen also die durch 4 teilbaren Zahlen ab 8. Man kann 56 darstellen als $4\cdot(13+1)$. Somit steht 56 an der 13. Stelle in Zeile drei.

An der k-ten Stelle der vierten Zeile steht wegen (2) die Summe

$$4\cdot(k+1)+4\cdot(k+2)=4\cdot(2\,k+3)=8\cdot k+12=8\cdot(k+1)+4\,. \tag{3}$$

In dieser Zeile stehen also die Zahlen, die bei Division durch 8 den Rest 4 lassen, ab 20. Die Zahl 56 ist durch 8 ohne Rest teilbar und deshalb nicht in Zeile vier enthalten.

Zeile fünf beginnt mit den Zahlen 48, 64 und 80, wie im Teil a) gezeigt wurde, 56 ist also auch nicht in der fünften Zeile enthalten.

Die erste Zahl in Zeile sechs ist $48 + 64 = 112$. Da 112 größer als 56 ist, kann 56 weder in Zeile sechs noch in einer der folgenden Zeilen vorkommen.

Damit kommt die Zahl 56 genau zweimal in der Zahlenmauer vor (an 56. Stelle in Zeile eins, an 13. Stelle in Zeile drei).

560922 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus der Produktformel zu $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$.

Teil b) Zunächst bestimmen wir die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Ameisen nach rechts bzw. links abbiegen. Beide Wahrscheinlichkeiten sind gleich groß. Da die Ameisen entweder geradeaus laufen oder abbiegen, beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Abbiegen $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Damit ergibt sich für das Abbiegen nach rechts und das Abbiegen nach links jeweils die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$.

Der Weg einer Ameise wird durch deren Entscheidungen auf den durchlaufenen Gitterknoten eindeutig bestimmt. Wir protokollieren l, r bzw. g, wenn sich die Ameise dabei nach links bzw. rechts wendet oder aber geradeaus weitergeht, und geben einen Weg im Ereignisraum durch die Folge der Entscheidungen der Ameise an. Alle weiteren zahlenmäßigen Längenangaben beziehen sich auf die Einheit „Kästchenlänge“.

In den folgenden Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten werden die Ereignisräume der möglichen Pfade untersucht, die eine Ameise von S aus durchlaufen kann. Dabei wird mehrfach die erste und die zweite Pfadregel (Additions- bzw. Multiplikationssatz) verwendet.

Es ist für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten unerheblich, ob sich die Ameise von S aus zuerst nach oben, unten, rechts oder links bewegt, denn die jeweiligen Ereignisteilräume kann man durch Drehen des Gitters auf den Ereignisteilraum abbilden, in dem die Ameise zunächst nach rechts geht. In allen vier Ereignisteilräumen ist deshalb die Wahrscheinlichkeit, dass die Ameise nach 6 Sekunden wieder im Ausgangspunkt S angekommen ist und dabei die Umfangslinie eines Rechtecks genau einmal abgelaufen hat, gleich. Wir können unsere Untersuchungen also auf den Ereignisteilraum beschränken, in dem die Ameise von S aus zunächst eine Einheit nach rechts läuft, und nur die Entscheidungen der Ameise in den Sekunden zwei bis sechs betrachten.

Die Umfangslinie des zu umlaufenden Rechtecks beträgt 6. Das Rechteck hat demnach die Seitenlängen 1 und 2. Umläuft die Ameise ein solches (1×2)-Rechteck, so kann S entweder ein Eckpunkt des Rechtecks (Fall 1) oder ein innerer Punkt einer Rechteckseite (Fall 2) sein.

Fall 1: Ist S ein Eckpunkt des Rechtecks, dann führen nach der ersten Sekunde die folgenden vier Wege $lgllg$, $rgrrg$, $gllgl$ oder $grrgr$ zu einem geschlossenen Rechteck und zum Ausgangspunkt S zurück. Alle vier Wege enthalten zwei Geradeaus-Entscheidungen g der Ameise und drei Abbiege-Entscheidungen r bzw. l nach rechts bzw. links. Alle diese Wege werden also mit derselben Wahrscheinlichkeit durchlaufen. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des ersten Falles ist demnach

$$4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^5}{5^5}\,.$$

Fall 2: Ist S ein innerer Punkt einer Rechteckseite, so liegt der Startpunkt auf der Rechteckseite mit der Seitenlänge 2. In diesem Fall führen folgende Wege $llgll$ oder $rrgrr$ nach der ersten Sekunde zu einem geschlossenen Rechteck und zum Ausgangspunkt S zurück. Diese zwei Wege sind gleich wahrscheinlich, denn sie enthalten beide eine Geradeaus-Entscheidung g der Ameise und vier Abbiege-Entscheidungen r bzw. l nach rechts bzw. links. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Falles 2 ist demnach

$$2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2^5}{5^5}\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Ameise in 6 Sekunden genau die Umfangslinie eines Rechtecks genau einmal abgelaufen hat und zum Ausgangspunkt S zurückgekehrt ist, beträgt also

$$\frac{2^5}{5^5} + \frac{2^5}{5^5} = \frac{2^6}{5^5} = 0{,}02048\,.$$

Unter allen Ameisenwegen der Länge 6 durchläuft also eine Ameise in knapp über 2 % aller Fälle genau ein Rechteck der Länge 6 und kehrt zum Ausgangspunkt S zurück.

<u>560923 Lösung</u> *10 Punkte*

Teil a) Es gilt zwar $\frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{6}{3} = 2$, aber

$$\frac{1}{1+\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+\frac{5}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} + \frac{1}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{9}{8} \neq \frac{4}{3}\,.$$

Also ist das Paar $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ keine Lösung von Gleichung (2) und damit keine gemeinsame Lösung der Gleichungen (1) und (2).

Teil b) Eine gemeinsame Lösung beider Gleichungen ist zum Beispiel das Zahlenpaar $(2, 0)$, denn es gilt:

$$2 + 0 = 2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+0} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}\,.$$

Teil c) Bringt man die linke Seite von (2) auf einen gemeinsamen Nenner, ergibt sich

$$\frac{1+b}{(1+a)\cdot(1+b)} + \frac{1+a}{(1+a)\cdot(1+b)} = \frac{2+a+b}{(1+a)\cdot(1+b)} = \frac{4}{3}\,.$$

Einsetzen der ersten Gleichung $a + b = 2$ im Zähler liefert

$$\frac{2+2}{(1+a)\cdot(1+b)} = \frac{4}{(1+a)\cdot(1+b)} = \frac{4}{3}$$

bzw.

$$(1+a)\cdot(1+b) = 1 + a + b + a \cdot b = 3\,.$$

Einsetzen der ersten Gleichung und Vereinfachung führt auf $a \cdot b = 0$.

Eine der Zahlen a und b muss also gleich 0 sein, die andere gleich 2, da auch $a + b = 2$ gelten muss. Die einzig möglichen Lösungspaare sind daher $(0, 2)$ und $(2, 0)$. Eine Probe bestätigt, dass diese beiden Paare auch tatsächlich gemeinsame Lösungen der Gleichungen (1) und (2) sind.

Lösungsvariante: Durch Einsetzen von $b = 2 - a$ in Gleichung (2) erhält man

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{3-a} = \frac{4}{3}\,.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit dem Hauptnenner $3 \cdot (1+a) \cdot (3-a)$ erhält man nach Umformungen $0 = 4\,a \cdot (2-a)$. Diese Gleichung hat nur die Lösungen $a = 0$ und $a = 2$, woraus sich die beiden möglichen Lösungspaare $(0, 2)$ und $(2, 0)$ ergeben. Die Probe zeigt, dass beide Paare in der Tat gemeinsame Lösungen der Gleichungen (1) und (2) sind.

560924 Lösung *10 Punkte*

Wir zeigen zunächst: Sind a und b die Längen zweier Seiten eines Dreiecks, so gilt für seinen Flächeninhalt

$$F \leq \frac{1}{2} \cdot a \cdot b\,. \tag{1}$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn diese Seiten senkrecht aufeinander stehen.

Beweis: Der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC mit den Seitenlängen $a = |BC|$ und $b = |AC|$ ergibt sich als Produkt $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$, wobei h_a die Länge der Höhe $\overline{AP}$ auf die Gerade BC ist und P den Höhenfußpunkt bezeichnet. Da a vorgegeben ist, hängt der Flächeninhalt nur von h_a ab. Steht die Seite $\overline{AC}$ senkrecht auf der Seite $\overline{BC}$, dann gilt $h_a = b$. Steht die Seite $\overline{AC}$ nicht senkrecht auf $\overline{BC}$, dann ist das Dreieck APC rechtwinklig mit der Hypotenuse $\overline{AC}$ und es gilt $h_a < b$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Teil a) Für die Stangen im Viereck gibt es zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten: ihre Längen sind der Reihe nach gleich 6, 8, 6, 8 oder gleich 6, 6, 8, 8. Im ersten Fall erhalten wir ein Parallelogramm und im zweiten ein Drachenviereck.

Ein Parallelogramm wird durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke zerlegt. Der Flächeninhalt des Parallelogramms ergibt sich aus der Summe der Flächeninhalte dieser Dreiecke. Der Flächeninhalt dieser Dreiecke wird maximal, wenn sie rechtwinklige Dreiecke sind. Damit ist der Flächeninhalt des Parallelogramms maximal, wenn es ein Rechteck ist. Der maximale Flächeninhalt beträgt daher $6 \cdot 8 = 48$.

Der Flächeninhalt des Drachenvierecks ist dann am größten, wenn zwei aneinander stoßende Seiten mit den Längen 6 und 8 einen rechten Winkel einschließen. Dann zerlegt die Symmetrieachse das Drachenviereck in zwei Dreiecke, die beide rechtwinklig sind. Auch hier beträgt der maximale Flächeninhalt daher wieder $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 48$.

Teil b) Das Viereck wird durch eine Diagonale der Länge l in zwei Teildreiecke mit den Seitenlängen a, b, l bzw. c, d, l zerlegt. Der Flächeninhalt des Vierecks ist gleich der Summe der Inhalte dieser beiden Teildreiecke. Nach der einleitenden Bemerkung ist der Flächeninhalt jedes der beiden Teildreiecke höchstens gleich $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ bzw. $\frac{1}{2} \cdot c \cdot d$. Somit ergibt sich für den Flächeninhalt F des Vierecks

$$F \leq \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot c \cdot d = \frac{a \cdot b + c \cdot d}{2}\,,$$

was zu zeigen war.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 560921 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) Richtiges Angeben der drei Zahlen .... 1 Punkt
Teil b) Je richtigem Ergebnis 1 Punkt .... 2 Punkte
Teil c) .... 7 Punkte
Für jede richtige Argumentation der Zeilen zwei, drei, vier, fünf und sechs .... 1 Punkt
Richtige Argumentation für die folgenden Zeilen .... 1 Punkt
Angabe des korrekten Ergebnisses .... 1 Punkt

Aufgabe 560922 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) Berechnung .... 2 Punkte
Teil b) .... 8 Punkte
Erkennen, dass nur ein Rechteck möglich ist .... 1 Punkt
Erkennen, dass der Startpunkt ein Eckpunkt oder der Mittelpunkt der längeren Seite sein kann .... 1 Punkt
Berechnung der Wahrscheinlichkeiten .... 6 Punkte

Aufgabe 560923 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) Nachweis, dass das Paar $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ keine Lösung von Gleichung (2) ist .... 1 Punkt
Teil b) Angabe einer Lösung, ggf. Verweis auf die richtig gelöste Aufgabe c) .... 2 Punkte
Teil c) Finden der beiden Lösungen und Nachweis, dass es keine weiteren Lösungen geben kann bzw. Herleitung der Lösung durch Umformungen .... 7 Punkte

Aufgabe 560924 *Insgesamt: 10 Punkte*

Herleitung und Begründung von (1) .... 4 Punkte
Teil a) Diskussion des Rechtecks .... 2 Punkte
Diskussion des Drachenvierecks .... 2 Punkte
Teil b) Allgemeiner Fall .... 2 Punkte