56. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

560931

In der Gleichung

$$* \cdot *** = 6 \cdot **5 + 2017$$

ist jedes der sechs Sternchen so durch eine der Ziffern $1, 2, \ldots, 9$ zu ersetzen, dass die Gleichung stimmt. Keine zwei Sternchen dürfen durch die gleiche Ziffer ersetzt werden.

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, dies zu tun, und weisen Sie nach, dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt.

560932

Bestimmen Sie alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$y^2 + 1 = (3 - x)^2 ,$$
$$x^2 + 9 = (5 - y)^2$$

erfüllen.

560933

Wir betrachten in dieser Aufgabe Vierecke $ABCD$.

a) Angenommen, es gilt $|AB| = 2$, $|BC| = 6$, $|CD| = 7$ und $|DA| = 9$.
Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ höchstens gleich 30 ist.

Von nun an sei $ABCD$ ein Viereck mit Seitenlängen 2, 6, 7 und 9 in *beliebiger* Reihenfolge.

b) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ höchstens gleich 30 ist.

c) Zeigen Sie, dass jedes derartige Viereck mit Flächeninhalt 30 ein Sehnenviereck ist, und bestimmen Sie alle Möglichkeiten für den Umkreisradius.