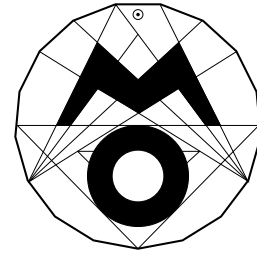


**56. Mathematik-Olympiade**  
**3. Stufe (Landesrunde)**  
**Olympiadeklasse 10**  
**Aufgaben – 2. Tag**



© 2016 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*  
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

561034

Ein Datensatz besteht aus 100 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen.

- a) Jemand streicht willkürlich 25 dieser Zahlen.  
Untersuchen Sie, ob es stets möglich ist, 25 weitere Zahlen so zu streichen, dass das arithmetische Mittel der verbleibenden 50 Zahlen mit dem arithmetischen Mittel der ursprünglichen 100 Zahlen übereinstimmt.
- b) Untersuchen Sie, ob man von 100 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen gezielt 25 Zahlen so auswählen kann, dass nach dem Streichen dieser 25 Zahlen das arithmetische Mittel der verbleibenden 75 Zahlen mit dem arithmetischen Mittel der ursprünglichen 100 Zahlen übereinstimmt.

*Hinweis:* Bei den Zahlen  $-1, 0, 1, 2$  handelt es sich um vier aufeinanderfolgende ganze Zahlen; bei den Zahlen  $3, 4, 6, 7$  jedoch nicht.

561035

Die Strecken  $\overline{A_1B_1}$  und  $\overline{A_2B_2}$  seien zwei zueinander senkrechte Durchmesser des Kreises  $k$ .

Ein Kreis  $k_1$  mit Mittelpunkt  $M_1$  berühre  $k$  in  $B_1$  von innen und ein Kreis  $k_2$  mit Mittelpunkt  $M_2$  berühre  $k$  in  $B_2$  von innen. Die Kreise  $k_1$  und  $k_2$  berühren sich zudem in  $S$  von außen. Es seien  $r, r_1$  und  $r_2$  die Radien der Kreise  $k, k_1$  bzw.  $k_2$ .

Berechnen Sie  $r_1$  und  $r_2$  für den Fall, dass  $r = 3$  cm und  $|\sphericalangle M_2B_2S| = 30^\circ$  gilt.

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

## 561036

Käsekästchen ist ein Spiel für zwei Personen. Auf einem Blatt Papier sind zu Spielbeginn von einem quadratischen Gitter aus  $n \times n$  Kästchen nur die Gitterpunkte eingezeichnet. Die Spieler zeichnen nun im ständigen Wechsel je eine Kästchenkante ein. Falls die eingezeichnete Kante für ein oder zwei der  $n \times n$  Gitterkästchen die letzte noch fehlende Kante war, erhält der entsprechende Spieler einen bzw. zwei Punkte und darf eine weitere Kante einzeichnen. Weil ihnen diese Punktejagd mit der Zeit langweilig wird, versuchen zwei Spieler so zu spielen, dass sie einen Punktgewinn möglichst lange hinauszögern können.

Ermitteln Sie, wie viele Kanten (in Abhängigkeit von  $n$ ) im Spielverlauf maximal eingezeichnet werden können, ohne dass eines der  $n \times n$  Gitterkästchen vollständig umrandet ist.