56. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 6
Lösungen – 1. Tag

560631 Lösung *6 Punkte*

A, B, C, D und E bezeichnen die jeweiligen Mengen an Kastanien in kg der fünf Freunde Anne, Bea, Chris, Danny und Emil.

Zusammen haben die Freunde 132 kg gesammelt, somit gilt:

(0) $A + B + C + D + E = 132.$

Für die verbalen Bedingungen (1) bis (4) können nachfolgende Gleichungen aufgestellt werden:

(1) $A + B + C = D + E,$
(2) $A + B + C + E = 112,$
(3) $A + B = C + E,$
(4) $A + D = E.$

Aus (0) und (2) folgt $D = 132 - 112 = 20$.

Durch Einsetzen von (1) in (2) erhält man $D + E + E = 112$. Nach Einsetzen der bereits bekannten Lösung für D und Umstellen nach E ergibt sich $E = (112 - 20) : 2 = 46$.

Mittels (4) folgt unmittelbar $A + 20 = 46$. Also ist $A = 46 - 20 = 26$.

Einsetzen von (3) in (2) ergibt $C + E + C + E = 112$ oder $2 \cdot (C + 46) = 112$, woraus $C = 112 : 2 - 46 = 10$ folgt.

B kann schließlich beispielsweise mit Hilfe von (3) $26 + B = 10 + 46$ berechnet werden. Somit folgt $B = 56 - 26 = 30$.

Folglich haben Anne 26 kg, Bea 30 kg, Chris 10 kg, Danny 20 kg und Emil 46 kg Kastanien gesammelt.

Probe:

(0) $26\,\text{kg} + 30\,\text{kg} + 10\,\text{kg} + 20\,\text{kg} + 46\,\text{kg} = 132\,\text{kg}$ ist eine wahre Aussage.
(1) $26\,\text{kg} + 30\,\text{kg} + 10\,\text{kg} = 20\,\text{kg} + 46\,\text{kg}$ ist eine wahre Aussage.
(2) $26\,\text{kg} + 30\,\text{kg} + 10\,\text{kg} + 46\,\text{kg} = 112\,\text{kg}$ ist eine wahre Aussage.
(3) $26\,\text{kg} + 30\,\text{kg} = 10\,\text{kg} + 46\,\text{kg}$ ist eine wahre Aussage.
(4) $26\,\text{kg} + 20\,\text{kg} = 46\,\text{kg}$ ist eine wahre Aussage.

Hinweis: Dieser Lösungsgang ist nicht der einzig mögliche, auch andere Einsetzungsreihenfolgen führen zur Lösung, nachdem $D = 20$ feststeht. Ebenso kann die Lösung danach durch systematisches Probieren gefunden werden.

560632 Lösung *7 Punkte*

Teil a) Man kann je fünf große Bausteine zu einer Schicht zusammenfügen, die dann die Maße $5\,\mathrm{cm} \times 5\,\mathrm{cm} \times 1\,\mathrm{cm}$ aufweist, und anschließend fünf solcher Schichten übereinanderlegen, so dass der Würfel mit den Kantenlängen $5\,\mathrm{cm} \times 5\,\mathrm{cm} \times 5\,\mathrm{cm}$ entsteht. Anton benötigt insgesamt 25 große Bausteine.

Teil b) Man legt sechs große Bausteine so nebeneinander, dass ein $6\,\mathrm{cm} \times 5\,\mathrm{cm} \times 1\,\mathrm{cm}$-Block entsteht. Danach legt man einen siebenten großen Baustein so an, dass eine $6\,\mathrm{cm} \times 6\,\mathrm{cm} \times 1\,\mathrm{cm}$-Schicht entsteht, bei der in einer Ecke ein kleiner Würfel mit der Kantenlänge $1\,\mathrm{cm}$ fehlt.

Nun werden sechs solcher Schichten aufeinandergelegt und der fehlende Raum an einer Ecke durch einen großen Baustein und den einzelnen kleinen Würfel gefüllt. Man benötigt insgesamt 43 große Bausteine und den kleinen Würfel.

Teil c) Da $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ und $343 : 5 = 68$ Rest 3 gilt, würde man, um einen solchen Würfel zusammenzusetzen, drei kleine Würfel-Bausteine benötigen. Es ist aber nur einer vorhanden, deswegen lässt sich der gewünschte Würfel nicht zusammensetzen.

560633 Lösung *7 Punkte*

Teil a) Wenn sich die erste Ziffer als zweite wiederholen soll, muss die dritte eine andere sein. Dafür gibt es $(10 \cdot 1 \cdot 9 =)\,90$ Möglichkeiten.

Da aber auch die erste und die dritte oder auch die zweite und die dritte Ziffer gleich sein können, gibt es insgesamt $(3 \cdot 90 =)\,270$ Möglichkeiten.

Da es insgesamt 999 verschiedene Ziffernteile für die Kennzeichen gibt, weist tatsächlich mehr als ein Viertel aller solcher Kennzeichen genau zwei gleiche Ziffern auf: Franz hat also Recht.

Teil b) Ein Kennzeichen, in dem keine 5 auftaucht, hat an keiner Stelle eine 5. Also gibt es für jede der drei Stellen neun mögliche Ziffern. Folglich gibt es $(9 \cdot 9 \cdot 9 =)\,729$ Ziffernteile von Kennzeichen, die keine 5 enthalten. Darunter ist allerdings auch der Ziffernteil 000. Folglich gibt es 728 verschiedene Ziffernteile ohne eine 5.

Da es insgesamt 999 verschiedene Ziffernteile gibt, haben davon $(999 - 728 =)\,271$ Ziffernteile mindestens eine 5.

Also hat Franziska nicht Recht, denn 271 von 999 bilden einen größeren Anteil als 270 von 999.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 560631	*Insgesamt: 6 Punkte*
D gefunden	1 Punkt
Korrekte Lösung	4 Punkte
Probe	1 Punkt

Aufgabe 560632	*Insgesamt: 7 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	2 Punkte

Aufgabe 560633	*Insgesamt: 7 Punkte*
Teil a)	3 Punkte
Teil b)	4 Punkte