56. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 6
Lösungen – 2. Tag

560634 Lösung *6 Punkte*

Teil a) Ein Viertel des Preises, also (850 € : 4 =) 212,50 € stehen zur Verfügung. Außerdem spendet die Schülerfirma fünf Wochen lang jeweils ($6\,€ \cdot \frac{7}{12} =$) 3,50 €, also insgesamt ($3{,}50\,€ \cdot 5 =$) 17,50 €.

Folglich hat die Spendenaktion ($850\,€ - 212{,}50\,€ - 17{,}50\,€ =$) 620 € eingebracht.

Teil b) Bei 620 € Spenden können maximal zwölf 50-Euro-Scheine eingenommen worden sein; dann lassen sich aber die fehlenden 20 € nicht auf sieben weitere Scheine verteilen.

Bei elf 50-Euro-Scheinen ließen sich die restlichen 70 € nicht auf acht weitere Scheine verteilen.

Bei zehn 50-Euro-Scheinen bleiben 120 € übrig, die auf neun Scheine verteilt werden müssen. Dies ist auch unter Beachtung von (1) und (2) möglich: $3 \cdot 20\,€ + 6 \cdot 10\,€ = 120\,€$, und $3 \cdot 3 < 10 < 4 \cdot 3$.

Verringern wir jetzt die Anzahl der 50-Euro-Scheine weiter (also höchstens 9 Scheine), dann müssten die mindestens verbleibenden ($620 - 450 =$) 170 € auf mindestens 10 andere Scheine verteilt werden.

Wegen der Bedingung (2) kann die Anzahl der 20-Euro-Scheine aber höchstens 2 und wegen der Bedingung (1) die Anzahl der 10-Euro-Scheine höchstens 5 sein, was im Widerspruch dazu steht, dass die Summe der 10-Euro-Scheine und der 20-Euro-Scheine mindestens 10 sein müsste. Folglich ist die Lösung mit zehn 50-Euro-Scheinen die einzig mögliche.

Lösungsvariante mit systematischer Tabelle, hier mit aufsteigender Anzahl der 10-Euro-Scheine:

Anzahl 10-Euro-Scheine a	Anzahl 20-Euro-Scheine $b = a - 3$	Anzahl 50-Euro-Scheine $c = 19 - a - b$	Summe in Euro	Bedingung (2) $3b < c < 4b$
3	0	16	830	nein
4	1	14	760	nein
5	2	12	690	nein
6	3	10	620	ja
7	4	8	550	nein

Nur die Zusammenstellung mit sechs 10-Euro-Scheinen, drei 20-Euro-Scheinen und zehn 50-Euro-Scheinen erfüllt alle Bedingungen der Aufgabe.

Der Förderverein hat bei der Spendenaktion sechs 10-Euro-Scheine erhalten.

Lösungsvariante ohne Verwendung der Spendensumme des Schulfestes:

Für die Anzahlen der Euro-Scheine verwenden wir folgende Bezeichnungen:

a Anzahl der 10-Euro-Scheine,
b Anzahl der 20-Euro-Scheine,
c Anzahl der 50-Euro-Scheine.

Dann gilt

(1) $a + b + c = 19$,
(2) $a = b + 3$,
(3) $3b < c < 4b$.

Aus (1) und (2) erhält man $2b + 3 + c = 19$, also

(4) $2b + c = 16$.

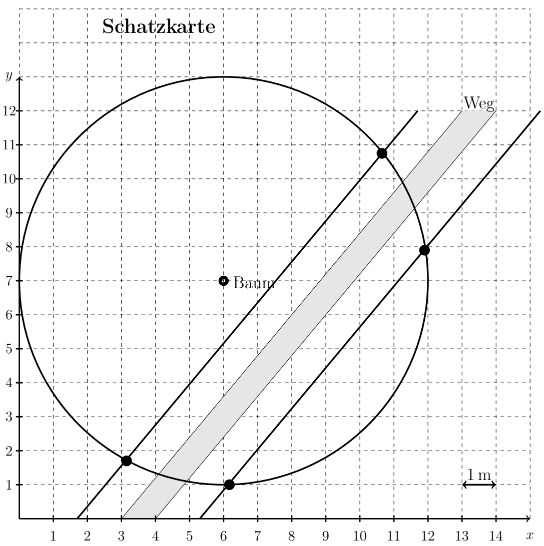
Ersetzt man in (4) wegen (3) c durch das kleinere $3b$, dann erhält man $5b < 16$, also $b \leq 3$.

Ersetzt man in (4) wegen (3) c durch das größere $4b$, dann erhält man $6b > 16$, also $b \geq 3$.

Folglich gelten $b = 3$, $a = 6$ und $c = 10$. Diese Anzahlen ergeben auch die Spendensumme 620 €.

<u>560635 Lösung</u> *7 Punkte*

Teil a) Die möglichen Orte für die Grabung werden durch maßstäbliche Konstruktion gefunden. Alle Punkte, die 6 Meter vom Baum entfernt sind, liegen auf einem Kreis mit $r = 6\,\text{m}$ um den Baum. Alle Punkte, die einen Meter vom Wegrand entfernt sind, liegen auf einer der beiden Parallelen zu den Wegrändern mit dem Abstand von einem Meter. Die beiden Parallelen schneiden den Kreis in vier Punkten. Diese sind die möglichen Orte für die Lage des Schatzes.



Teil b) Aus den Aussagen (1) und (4) und (3) folgen die möglichen ungeraden Ziffern: 1 und 3, 1 und 5, 1 und 7, 1 und 9. Aus den Bedingungen (2) und (3) folgen dann die jeweils möglichen geraden Ziffern. Alle Möglichkeiten für Ziffern der Zahlenkombination des Schlosses stehen in der 4. Spalte der Tabelle.

ungerade Ziffern	Summe	gerade Ziffern	Ziffern der Kombination
1 und 3	$1+3=4$	$4=0+4$	1, 3, 0, 4
1 und 5	$1+5=6$	$6=0+6$	1, 5, 0, 6
		$6=2+4$	1, 5, 2, 4
1 und 7	$1+7=8$	$8=0+8$	1, 7, 0, 8
		$8=2+6$	1, 7, 2, 6
1 und 9	$1+9=10$	$10=2+8$	1, 9, 2, 8
		$10=4+6$	1, 9, 4, 6

Teil c) Da sich vier verschiedene Ziffern auf $(4\cdot3\cdot2\cdot1=)\,24$ verschiedene Arten anordnen lassen und es sieben Möglichkeiten für die Auswahl der Ziffern gibt, müssen die Kinder $(24\cdot7=)\,168$ Einstellungen an dem Zahlenschloss überprüfen.

560636 Lösung *7 Punkte*

Nach Aufgabenstellung gibt es insgesamt 36 Münzen mit 8 verschiedenen Werten und den in folgender Tabelle angegebenen Anzahlen:

1 ct	2 ct	5 ct	10 ct	20 ct	50 ct	1 €	2 €	insgesamt
2	7	5	1	8	4	6	3	36

Teil a) Im ungünstigsten Fall zieht man die erste 20-ct-Münze, nachdem man schon alle anderen 28 Münzen gezogen hat: Also hat man mit der neunundzwanzigsten Münze erstmalig mit Sicherheit eine 20-ct-Münze in der Hand.

Teil b) Auch hier hilft wieder der Gedanke, dass man alle „nicht gemeinten“ Münzen vor der entscheidenden zweiten Münze zieht. Es gibt $(36-8-7=)\,21$ „nicht gemeinte“ Münzen. Wenn man jetzt alle acht 20-ct-Münzen zieht, hat man zwar schon diesen Münztyp, der andere kommt aber erst beim nächsten, dem insgesamt 30. Zug.

Teil c) „Genau 10 ct“ kann man in die Hand nehmen durch eine 10-ct-Münze, durch zwei 5-ct-Münzen oder (bei den gegebenen Anzahlen) durch 5 ct + 2 ct + 2 ct + 1 ct, durch 2 ct + 2 ct + 2 ct + 2 ct + 2 ct oder durch 2 ct + 2 ct + 2 ct + 2 ct + 1 ct + 1 ct.

Wenn die Oma neben den 21 „anderen“ Münzen mit den Beträgen 20 ct, 50 ct, 1 € und 2 € auch noch vier 2-ct-Münzen und eine 5-ct-Münze auf den Tisch legt, kann noch kein Geldbetrag von 10 ct zusammengestellt werden. 26 Münzen reichen also nicht.

Wenn aber 27 Münzen auf dem Tisch liegen, sind mit Sicherheit sechs Münzen von den zwei 1-ct-Stücken, sieben 2-ct-Stücken, fünf 5-ct-Stücken und einem 10-ct-Stück dabei.

Sind darunter bereits fünf 2-ct-Stücke oder zwei 5-ct-Stücke oder ein 10-ct-Stück, so kann der Geldbetrag von 10 ct zusammengestellt werden. Es bleiben nur noch zwei Fälle übrig.

Fall 1: Es liegt kein 5-ct-Stück auf dem Tisch. Dann liegen aber notwendigerweise zwei 1-ct-Stücke und vier 2-ct-Stücke auf dem Tisch, was einen Geldbetrag von 10 ct ergibt.

Fall 2: Es liegt genau ein 5-ct-Stück auf dem Tisch. Dann müssen aber wenigstens zwei 2-ct-Stücke und wenigstens ein 1-ct-Stück auf dem Tisch liegen, was ebenfalls einen Geldbetrag von 10 ct ergibt.

Es sind also 27 Münzen ausreichend, um den Geldbetrag von 10 ct mit Sicherheit zusammenstellen zu können.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 560634	*Insgesamt: 6 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b)	4 Punkte

Aufgabe 560635	*Insgesamt: 7 Punkte*
Teil a)	3 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	1 Punkt

Aufgabe 560636	*Insgesamt: 7 Punkte*
Teil a)	1 Punkt
Teil b)	2 Punkte
Teil c)	4 Punkte