56. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 7
Lösungen – 1. Tag

560731 Lösung *6 Punkte*

Teil a) Wir ermitteln die Gesamtanzahl der Nüsse durch Rückwärtsarbeiten:

Die restlichen 16 Nüsse sind zwei Drittel der Anzahl der Nüsse, von der sich Evelyn ein Drittel genommen hat. Bevor sich Evelyn die Nüsse nahm, waren also noch $(\frac{3}{2} \cdot 16 =)$ 24 Nüsse im Korb. Evelyn hat sich $(\frac{1}{3} \cdot 24 =)$ 8 Nüsse genommen.

Diese 24 Nüsse sind zwei Drittel der Anzahl der Nüsse, von der sich Tim ein Drittel genommen hat. Bevor sich Tim die Nüsse nahm, waren also noch $(\frac{3}{2} \cdot 24 =)$ 36 Nüsse im Korb. Tim hat sich $(\frac{1}{3} \cdot 36 =)$ 12 Nüsse genommen.

Diese 36 Nüsse sind zwei Drittel der Anzahl der Nüsse, von der sich Miriam ein Drittel genommen hat. Bevor sich Miriam die Nüsse nahm, waren also noch $(\frac{3}{2} \cdot 36 =)$ 54 Nüsse im Korb. Miriam hat sich $(\frac{1}{3} \cdot 54 =)$ 18 Nüsse genommen.

Folglich gilt: Miriam hat sich 18 Nüsse, Tim 12 Nüsse und Evelyn 8 Nüsse genommen.

Teil b) Wie in a) begründet, befanden sich anfangs 54 Nüsse im Korb. Jedem Kind gehören deshalb $(54 : 3 =)$ 18 Nüsse.

Von den restlichen 16 Nüssen müssen folglich Tim noch 6 und Evelyn noch 10 bekommen.

Lösungsvariante zu Teil a) Wir lösen die Aufgabe durch Vorwärtsarbeiten und unter Verwendung einer Variablen:

Es sei n die Anzahl der Nüsse im Korb, als ihn den Großvater abgestellt hat.

Miriam entnahm dem Korb ein Drittel der Nüsse. Die Anzahl der im Korb verbliebenen Nüsse ist dann $\frac{2}{3} \cdot n$.

Tim entnahm dem Korb wieder ein Drittel der Nüsse. Die Anzahl der im Korb verbliebenen Nüsse ist dann $(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot n =)\ \frac{4}{9} \cdot n$.

Evelyn entnahm dem Korb wieder ein Drittel der Nüsse. Die Anzahl der im Korb verbliebenen Nüsse ist dann $(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot n =)\ \frac{8}{27} \cdot n$. Nach Aufgabenstellung waren noch 16 Nüsse im Korb. Es gilt also $\frac{8}{27} \cdot n = 16$, woraus $n = 54$ folgt.

Folglich gilt: Miriam hat sich $(\frac{1}{3} \cdot 54 =)$ 18 Nüsse, Tim $(\frac{1}{3} \cdot (54 - 18) =)$ 12 Nüsse und Evelyn $(\frac{1}{3} \cdot (54 - 18 - 12) =)$ 8 Nüsse genommen.

560732 Lösung *6 Punkte*

Teil a) Wenn die Aussage (3) wahr ist, so wurde Adrian Zweiter und Ben Dritter. Daher ist dann Aussage (1) falsch. Folglich ist es nicht möglich, dass alle vier Aussagen gleichzeitig wahr sind.

Teile b) bis e) Wie die folgenden Beispiele zeigen, ist es jeweils möglich, dass die genannte Anzahl von Aussagen wahr ist. Dabei steht x jeweils für irgendeinen von A, B, C verschiedenen Teilnehmer, wobei Adrian mit A, Ben mit B und Cedric mit C abgekürzt werden und die Platzierung von links nach rechts gelesen wird.

Zu Teil b) $BAxCxx$ (nur die Aussagen (1), (2) und (4) sind wahr).

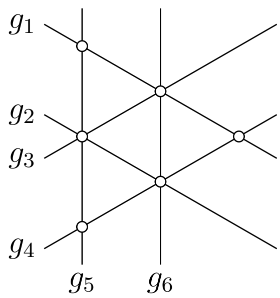
Zu Teil c) $xAxCBx$ (nur die Aussagen (2) und (4) sind wahr).

Zu Teil d) $BACxxx$ (nur die Aussage (1) ist wahr).

Zu Teil e) $CAxBxx$ (alle vier Aussagen sind falsch).

560733 Lösung *8 Punkte*

Teil a) In der Abbildung L 560733 a sind sechs paarweise verschiedene Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6 derart gezeichnet, dass jede dieser sechs Geraden zu genau einer der anderen fünf Geraden parallel ist und diese Geraden insgesamt genau 6 Schnittpunkte miteinander haben.



L 560733 a

Teil b) Wir betrachten eine Konfiguration aus sechs paarweise verschiedenen Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, von denen jede dieser sechs Geraden zu genau einer der anderen fünf Geraden parallel ist. Wir können die Bezeichnungen so wählen, dass g_1 parallel zu g_2, g_3 parallel zu g_4 und g_5 parallel zu g_6 ist. Es seien A, B, C und D die Schnittpunkte von g_1 und g_3, von g_2 und g_3, von g_2 und g_4 sowie von g_1 und g_4. Da diese vier Geraden paarweise verschieden sind, sind auch A, B, C und D paarweise verschieden. Durch g_1, g_2, g_3, g_4 werden also insgesamt genau 4 Schnittpunkte erzeugt.

Da die Gerade g_5 nicht parallel zu den Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 ist, hat sie mit jeder dieser Geraden genau einen Schnittpunkt, weswegen durch g_5 maximal 4 Schnittpunkte mit g_1, g_2, g_3 und g_4 hinzukommen. Die Gerade g_5 kann mit keiner den Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 mehr als einen Schnittpunkt haben, da sie andernfalls gleich dieser Geraden wäre. Weiter kann kein von A, B, C und D verschiedener Schnittpunkt der Geraden g_5 mit einer der Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 auch gemeinsamer Schnittpunkt mit einer anderen der Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 sein, da A, B, C und D die einzigen Schnittpunkte von g_1, g_2, g_3 und g_4 sind.

Daher sind nur folgende Fälle zu betrachten:

Fall 1: Die Gerade g_5 verläuft durch keinen der Punkte A, B, C und D. Die Gerade g_5 erzeugt mit g_1, g_2, g_3 und g_4 genau 4 verschiedene Schnittpunkte. Durch g_5 kommen also genau 4 Schnittpunkte mit g_1, g_2, g_3 und g_4 hinzu.

Fall 2: Die Gerade g_5 verläuft durch genau einen der Punkte A, B, C und D. Dann schneidet g_5 genau zwei der Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 in diesem schon gezählten Punkt. Die beiden anderen Geraden schneidet g_5 in zwei verschiedenen Punkten. Durch g_5 kommen also genau 2 Schnittpunkte mit g_1, g_2, g_3 und g_4 hinzu.

Fall 3: Die Gerade g_5 verläuft durch zwei der Punkte A, B, C und D. Dann kann g_5 nur durch den Schnittpunkt von zwei der Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 und durch den Schnittpunkt der anderen beiden der Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 verlaufen. Da beide Schnittpunkte schon gezählt sind, kommen durch g_5 keine Schnittpunkte mit g_1, g_2, g_3 und g_4 hinzu.

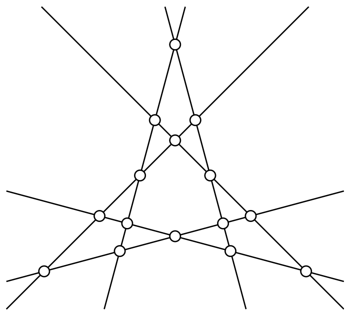
Da die Fallunterscheidung vollständig ist, können daher durch g_5 nur genau 0, 2 oder 4 Schnittpunkte hinzukommen.

Da die Gerade g_6 parallel zur Geraden g_5 ist, schneiden die Geraden g_5 und g_6 einander nicht. Wie bei der Geraden g_5 können daher durch die Gerade g_6 nur genau 0, 2 oder 4 Schnittpunkte hinzukommen.

Die Anzahl Schnittpunkte der Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 und g_6 ist daher stets gerade.

Man kann also sechs paarweise verschiedene Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6 nicht derart zeichnen, dass jede dieser sechs Geraden zu genau einer der anderen fünf Geraden parallel ist und die Anzahl ihrer Schnittpunkte ungerade ist.

Teil c) Wir überlegen uns, wie viele Schnittpunkte 6 Geraden höchstens haben können: Die erste Gerade hat insgesamt höchstens 5 Schnittpunkte mit den anderen 5 Geraden, die zweite Gerade hat höchstens noch 4 weitere Schnittpunkte mit den restlichen 4 Geraden und so weiter. Die fünfte Gerade hat noch höchstens einen weiteren Schnittpunkt mit der sechsten Geraden. Bei 6 Geraden sind es daher höchstens $(5 + 4 + 3 + 2 + 1 =)$ 15 Schnittpunkte.



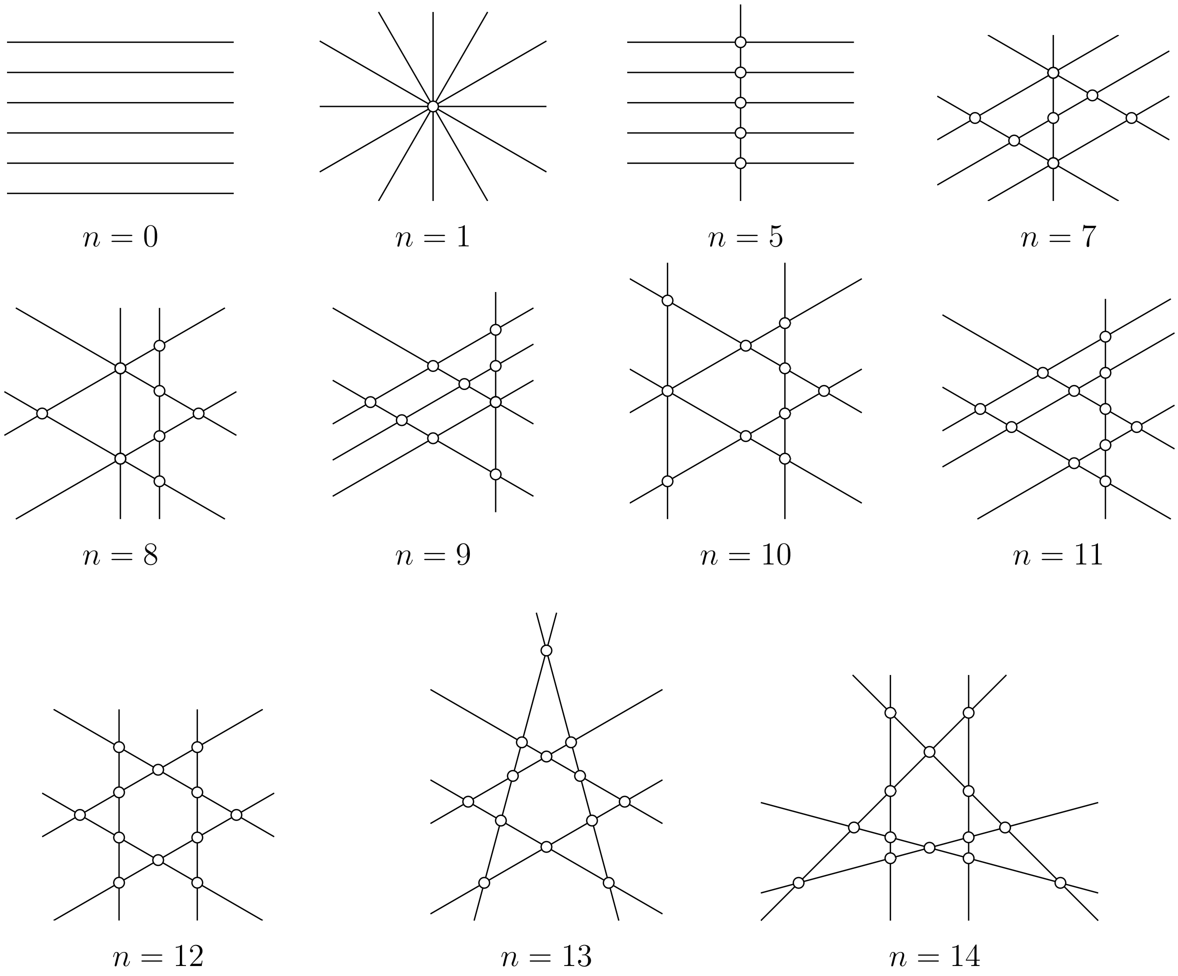
L 560733 b

In Abbildung L 560733 b sind 6 Geraden gezeigt, von denen keine zwei parallel zueinander sind und von denen auch nur höchstens zwei Geraden einen Schnittpunkt gemeinsam haben. In dieser Konfiguration haben die 6 Geraden genau 15 Schnittpunkte.

Daher ist 15 die größte Anzahl an Schnittpunkten, die 6 Geraden haben können.

Teil d) Wie in Teilaufgabe c) gezeigt, ist 15 die größte Anzahl. Wie dem Hinweis zu entnehmen ist, sind die Anzahlen 2, 3 und 4 nicht möglich. Wir behaupten, dass alle anderen Anzahlen, nämlich 0, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 und 15, auftreten können.

Zeichnungen zu den Anzahlen 6 und 15 wurden schon in den Teilaufgaben a) und c) erstellt. In der nachfolgenden Abbildung L 560733 c ist jeweils eine entsprechende Konfiguration für eine der anderen Anzahlen n gezeichnet.



L 560733 c

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 560731	*Insgesamt: 6 Punkte*
Teil a)	4 Punkte
Teil b)	2 Punkte

Aufgabe 560732	*Insgesamt: 6 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b)	1 Punkt
Teil c)	1 Punkt
Teil d)	1 Punkt
Teil e)	1 Punkt

Aufgabe 560733	*Insgesamt: 8 Punkte*
Teil a)	1 Punkt
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	1 Punkt
Teil d) Zeichnungen für 5 Anzahlen inklusive der Zeichnungen in a) und c)	1 Punkt
Zeichnungen für weitere 5 Anzahlen	1 Punkt
Zeichnungen für die drei restlichen Anzahlen	1 Punkt