56. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 8
Lösungen – 1. Tag

560831 Lösung *6 Punkte*

Teil a) Für die gleichförmige Bewegung gilt die Formel $v = s/t$, wobei v die Geschwindigkeit, s der zurückgelegte Weg und t die hierfür benötigte Zeit ist. Im vorliegenden Fall ist s die Summe aus der Länge des Regionalzuges und der Länge des Schwarzenberg-Tunnels. Folglich gilt

$$s = 130\,\mathrm{m} + 220\,\mathrm{m} = 350\,\mathrm{m}\,.$$

Für die zu ermittelnde Zeit t folgt hieraus und nach Voraussetzung

$$t = \frac{s}{v} = \frac{350\,\mathrm{m}}{84\,\mathrm{km/h}} = \frac{350\,\mathrm{m}\cdot 60\,\mathrm{min}}{84\,000\,\mathrm{m}} = \frac{21\,000}{84\,000}\,\mathrm{min} = \frac{1}{4}\,\mathrm{min}\,.$$

Der Regionalzug brauchte für die Tunneldurchfahrt eine viertel Minute.

Teil b) Es seien v_R die Geschwindigkeit des Regionalzuges, v_G die Geschwindigkeit des Güterzuges, ℓ die Länge des Güterzuges und t die Zeit, in der der Güterzug an Lukas vorbeifuhr. Für die Geschwindigkeit v, mit der Lukas am Güterzug vorbeifuhr, gilt dann einerseits

$$v = v_\mathrm{R} + v_\mathrm{G}\,, \tag{1}$$

da die beiden Züge entgegengesetzt fuhren, und andererseits

$$v = \frac{\ell}{t}\,, \tag{2}$$

da Lukas in der Zeit t mit der Geschwindigkeit v an dem Güterzug mit der Länge ℓ vorbeifuhr. Aus (1) und (2) folgt $v_\mathrm{R} + v_\mathrm{G} = \frac{\ell}{t}$ und daher

$$v_\mathrm{G} = \frac{\ell}{t} - v_\mathrm{R}\,. \tag{3}$$

Nach den Angaben der Aufgabenstellung gelten $\ell = 16\,\mathrm{m} + 14\cdot 21\,\mathrm{m} = 310\,\mathrm{m}$, $t = 9\,\mathrm{s}$ und $v_\mathrm{R} = 74\,\mathrm{km/h}$. Mit

$$\frac{\ell}{t} = \frac{310\,\mathrm{m}}{9\,\mathrm{s}} = \frac{310\,\mathrm{m}}{9\,\mathrm{s}}\cdot\frac{3600\,\mathrm{s}}{1\,\mathrm{h}}\cdot\frac{1\,\mathrm{km}}{1000\,\mathrm{m}} = \frac{310\cdot 3{,}6}{9}\,\mathrm{km/h} = 310\cdot 0{,}4\,\mathrm{km/h} = 124\,\mathrm{km/h}$$

folgt durch Einsetzen in (3)

$$v_\mathrm{G} = 124\,\mathrm{km/h} - 74\,\mathrm{km/h} = 50\,\mathrm{km/h}\,.$$

Der Güterzug fuhr mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h.

560832 Lösung *7 Punkte*

Wir bezeichnen mit t die Anzahl der Tage, an denen Julia den Roman gelesen hatte, und mit s die Anzahl der Seiten, die sie täglich las.

Da Julia das Buch am 7. Tag noch gelesen hat und an diesem Tag bereits 20 Seiten gelesen hatte, gelten

$$t \geq 7 \tag{1}$$

und

$$s \geq 20\,. \tag{2}$$

Da Julia sich die Seiten des Romans so eingeteilt hatte, dass sie jeden Tag die gleiche Anzahl an Seiten lesen konnte, gilt

$$t \cdot s = 342\,. \tag{3}$$

Wegen (1) und (3) folgt $s \leq \frac{342}{7} < 49$. Da t und s ganze Zahlen sind, muss s daher und wegen (2) und (3) ein Teiler von 342 sein, der größer oder gleich 20 und kleiner als 49 ist.

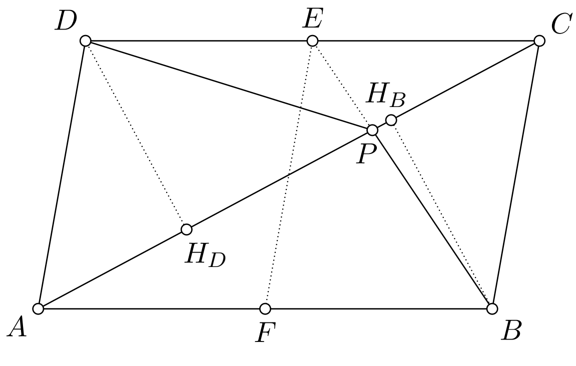
Die Primfaktorzerlegung von 342 ist $342 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 19$. Wegen $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18 < 20$ muss 19 ein Teiler von s sein. Wegen $3 \cdot 19 = 57 > 49$ kann 3 kein Teiler von s sein. Wegen $2 \cdot 19 = 38$ muss folglich $s = 38$ gelten. Wegen (3) muss daher $t = 9$ gelten.

Die Anzahl der Seiten, die Julia noch nach der 20. Seite an dem Dienstag bis zum Ende des Romans zu lesen hatte, ist daher mit $(342 - 6 \cdot 38 - 20 =)$ 94 aus den Angaben der Aufgabenstellung eindeutig bestimmbar.

Da der siebente Tag ein Dienstag ist und sie den Roman 9 Tage las, hatte sie am neunten Tag, also einem Donnerstag, die letzte Seite des Romans gelesen. Auch dieser Wochentag ist also aus den Angaben der Aufgabenstellung eindeutig bestimmbar.

560833 Lösung *7 Punkte*

Teil a) Wir bezeichnen mit H_B den Lotfußpunkt des Lotes vom Punkt B auf die Gerade AC und mit H_D den Lotfußpunkt des Lotes vom Punkt D auf die Gerade AC, siehe Abbildung L 560833 a. Da das Viereck $ABCD$ nach Voraussetzung ein Parallelogramm ist, sind die Dreiecke ABC und CDA nach dem Kongruenzsatz (sss) kongruent zueinander. Daher gilt



L 560833 a

$$|BH_B| = |DH_D|\,. \tag{1}$$

Die Strecke $\overline{BH_B}$ ist die zum Eckpunkt B gehörende Höhe im Dreieck BCP und die Strecke $\overline{DH_D}$ ist die zum Eckpunkt D gehörende Höhe im Dreieck CDP. Folglich gelten nach der Flächeninhaltsformel für Dreiecke

$$\mathrm{A}_{BCP} = \frac{1}{2} \cdot |CP| \cdot |BH_B| \quad \text{und} \quad \mathrm{A}_{CDP} = \frac{1}{2} \cdot |CP| \cdot |DH_D|\,.$$

Wegen (1) gilt daher

$$\mathrm{A}_{BCP} = \mathrm{A}_{CDP}\,. \tag{2}$$

Die Dreiecke BCP und CDP haben also den gleichen Flächeninhalt.

Teil b) Da die Strecke $\overline{BP}$ das Dreieck ABC in die Dreiecke ABP und BCP zerlegt, gilt

$$\mathrm{A}_{ABP} = \mathrm{A}_{ABC} - \mathrm{A}_{BCP}\,. \tag{3}$$

Da die Diagonale $\overline{AC}$ das Parallelogramm $ABCD$ in die flächeninhaltsgleichen Dreiecke ABC und ACD zerlegt, gilt

$$\mathrm{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{A}_{ABCD}\,. \tag{4}$$

Da die Strecke $\overline{CP}$ das Dreieck BCE in die Dreiecke BCP und CEP zerlegt, gilt

$$\mathrm{A}_{BCE} = \mathrm{A}_{BCP} + \mathrm{A}_{CEP}\,. \tag{5}$$

Da der Punkt E nach Voraussetzung der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$ ist, gilt

$$|CE| = \frac{1}{2} \cdot |CD|\,. \tag{6}$$

Es sei F der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Da das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist, ist auch das Viereck $BCEF$ ein Parallelogramm, und es gilt

$$\mathrm{A}_{BCEF} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{A}_{ABCD}\,. \tag{7}$$

Da die Diagonale $\overline{BE}$ das Parallelogramm $BCEF$ in die flächeninhaltsgleichen Dreiecke BCE und BEF zerlegt, folgt mit (7)

$$\mathrm{A}_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{A}_{BCEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathrm{A}_{ABCD}\,. \tag{8}$$

Die Dreiecke CDP und CEP haben dieselbe Höhenlänge zur Grundseite $\overline{CD}$ bzw. $\overline{CE}$. Wegen (6) und (2) gilt daher

$$\mathrm{A}_{CEP} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{A}_{CDP} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{A}_{BCP}\,. \tag{9}$$

Durch Einsetzen von A_{CEP} aus der Gleichung (9) in die Gleichung (5) folgt $\mathrm{A}_{BCE} = \mathrm{A}_{BCP} + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{A}_{BCP}$ und daher

$$\mathrm{A}_{BCP} = \frac{2}{3} \cdot \mathrm{A}_{BCE}\,.$$

Hieraus und aus (3), (4) und (8) folgt

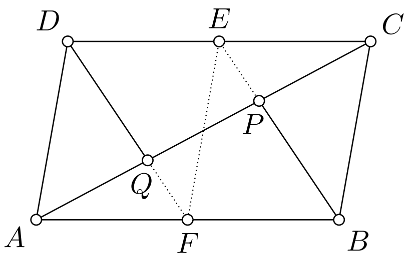
$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{ABP} &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{A}_{ABCD} - \frac{2}{3} \cdot \mathrm{A}_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{A}_{ABCD} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \mathrm{A}_{ABCD} \\ &= \frac{4}{12} \cdot \mathrm{A}_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{A}_{ABCD}\,.\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABP hat daher einen Anteil von einem Drittel am Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$.

Lösungsvariante zu Teil b) Wir bezeichnen den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ mit F und den Schnittpunkt der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{DF}$ mit Q, siehe Abbildung L 560833 b.

Da E und F Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten des Parallelogramms $ABCD$ sind, sind $\overline{BF}$ und $\overline{DE}$ zueinander parallele und gleich lange Seiten des Vierecks $BEDF$. Hieraus und wegen der Lage der Eckpunkte folgt, dass das Viereck $BEDF$ ein Parallelogramm ist, weswegen die Geraden BE und DF parallel zueinander sind.

Der Punkt E ist nach Voraussetzung Seitenmittelpunkt der Seite $\overline{CD}$ des Dreiecks CDQ. Wegen der Parallelität der Geraden BE und DF und nach einer Umkehrung des Satzes über die Mittellinien im Dreieck schneidet daher die Gerade BE die Seite $\overline{CQ}$ in ihrem Mittelpunkt. Da die Strecke $\overline{CQ}$ auf der Strecke $\overline{AC}$ liegt, ist der Punkt P nach Definition dieser Schnittpunkt. Folglich ist P der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CQ}$. Entsprechend folgt, dass der Punkt Q der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AP}$ ist. Daher gilt $|AQ| = |QP| = |CP|$. Da die Punkte P und Q auf der Strecke $\overline{AC}$ liegen, folgt hieraus $|AP| = \frac{2}{3} \cdot |AC|$. Da die Dreiecke ABC und ABP die gleiche Höhenlänge in Bezug auf den Eckpunkt B haben, folgt hieraus $\mathrm{A}_{ABP} = \frac{2}{3} \cdot \mathrm{A}_{ABC}$. Wegen $\mathrm{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{A}_{ABCD}$ folgt schließlich $\mathrm{A}_{ABP} = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{A}_{ABCD}$.



L 560833 b

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 560831		*Insgesamt: 6 Punkte*
Teil a)		2 Punkte
Teil b)	Prinzipiell geeigneter Lösungsansatz	1 Punkt
	Vollständige und begründete Herleitung der Zuglänge	2 Punkte
	Korrekte Antwort	1 Punkt

Aufgabe 560832	*Insgesamt: 7 Punkte*
Herleitung der Anzahl der Tage und der Anzahl der täglichen Seiten	4 Punkte
Wochentag der letzten Seite	2 Punkte
Anzahl der noch zu lesenden Seiten	1 Punkt

Aufgabe 560833		*Insgesamt: 7 Punkte*
Teil a)	Prinzipiell geeigneter Lösungsansatz, Skizze	1 Punkt
	Vollständiger und korrekter Beweis	2 Punkte
Teil b)	Prinzipiell geeigneter Lösungsansatz	1 Punkt
	Vollständiger und korrekter Beweis	3 Punkte