56. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 8
Lösungen – 2. Tag

560834 Lösung *6 Punkte*

Wir bezeichnen mit a die Masse der Getreidemenge, die A je Stunde mahlt, mit b die Masse der Getreidemenge, die B je Stunde mahlt, und mit g die Masse der gesamten zu mahlenden Getreidemenge. Nach Aufgabenstellung gelten dann $g = 8 \cdot a + 18 \cdot b$ und $g = 10 \cdot a + 15 \cdot b$. Daher gilt $8 \cdot a + 18 \cdot b = 10 \cdot a + 15 \cdot b$, also

$$3 \cdot b = 2 \cdot a\,, \tag{1}$$

und es gilt

$$g = 8 \cdot a + 6 \cdot 3 \cdot b = 8 \cdot a + 6 \cdot 2 \cdot a = 20 \cdot a\,. \tag{2}$$

Wenn A und B die gesamte Getreidemenge in x Stunden bewältigen, so gilt auch $g = x \cdot (a+b)$. Wegen (1) gilt aber $a + b = a + \frac{2}{3} \cdot a = \frac{5}{3} \cdot a$. Folglich gilt auch

$$g = x \cdot \frac{5}{3} \cdot a\,.$$

Hieraus und wegen (2) folgt $x \cdot \frac{5}{3} \cdot a = 20 \cdot a$ und daher $x = \frac{3}{5} \cdot 20 = 12$.

Die gesamte Getreidemenge wird folglich von A und B zusammen in 12 Stunden bewältigt.

Lösungsvariante: Nach Aufgabenstellung gelten: Wenn A genau 8 Stunden mahlt, braucht B für das restliche Getreide noch 18 Stunden. Wenn A genau 10 Stunden, also 2 Stunden mehr als 8 Stunden zum Einsatz kommt, braucht B nur 15 Stunden, also 3 Stunden weniger als 18 Stunden.

Da nach Aufgabenstellung bei beiden Mahlwerken die verarbeitete Getreidemenge jeweils proportional zur Arbeitszeit des Mahlwerkes ist, mahlt A in 2 Stunden genau so viel Getreide wie B in 3 Stunden.

Wenn nun A weitere 2 Stunden, also 12 Stunden eingesetzt wird, dann verringert sich die Arbeitszeit von B zur Verarbeitung des Restes erneut um 3 Stunden, also von 15 Stunden auf ebenfalls 12 Stunden.

Da A und B unabhängig voneinander arbeiten, haben sie bei gleichzeitigem Einsatz die Getreidemenge in 12 Stunden bewältigt.

560835 Lösung *7 Punkte*

Teil a) Wir setzen 3 für y in die Gleichung (G) ein und erhalten die Gleichung

$$\frac{4}{5 \cdot (x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{3}{15}\,. \tag{1}$$

Beide Seiten der Gleichung (1) sind auf der Menge M aller rationalen Zahlen, die verschieden von -2 sind, definiert. Auf dieser Menge M ist der Term $x + 2$ definiert und verschieden von

0. Daher ist die Multiplikation beider Seiten von (1) mit $5 \cdot (x+2)$ eine Äquivalenzumformung, weswegen die Gleichung

$$4 = 5 - (x+2) \tag{2}$$

äquivalent zur Gleichung (1) ist. Die Gleichung (2) ist äquivalent zu $x + 2 = 1$, weswegen die Gleichung (2) und daher auch die Gleichung (1) nur für $x = -1$ erfüllt ist. Somit folgt:

Bei der Vorgabe $y = 3$ gilt die Gleichung (G) also nur für $x = -1$.

Teil b) Wir setzen 2 für x in die Gleichung (G) ein und erhalten die Gleichung

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{4} - \frac{y}{15}\,. \tag{3}$$

Mit den Äquivalenzumformungen Subtraktion von $\frac{1}{4}$ und Multiplikation mit -15 erhalten wir die zur Gleichung (3) äquivalente Gleichung

$$\frac{3}{4} = y\,.$$

Daher gilt die Gleichung (3) nur für $y = \frac{3}{4}$. Bei der Vorgabe $x = 2$ gilt die Gleichung (G) folglich nur für $y = \frac{3}{4}$.

Teil c) Es sei y eine beliebige rationale Zahl. Dann sind die linke und die rechte Seite der Gleichung (G) auf der Menge M aller rationalen Zahlen verschieden von -2 definiert. Da der Term $\frac{1}{x+2}$ auf M definiert ist, ist die Subtraktion dieses Terms eine Äquivalenzumformung. Zusammen mit den Äquivalenzumformungen Zusammenfassen und Multiplikation mit -5 erhalten wir aus (G) die zu (G) äquivalenten Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{4}{5\cdot(x+2)} - \frac{1}{x+2} &= -\frac{y}{15}\,, \\ \frac{4-5}{5\cdot(x+2)} &= -\frac{y}{15} \end{aligned}$$

und schließlich

$$\frac{1}{x+2} = \frac{y}{3}\,. \tag{4}$$

Fall 1: Es gelte $y = 0$. Dann gibt es keine rationale Zahl x, für die die Gleichung (4) gilt. Daher gibt es in diesem Fall auch keine rationale Zahl x, für die die Gleichung (G) gilt.

Fall 2: Es gelte $y \neq 0$. Dann ist die Gleichung (4) auf der Menge M äquivalent zu $x + 2 = \frac{3}{y}$ und daher zu $x = \frac{3}{y} - 2$. Die rechte Seite kann wegen $\frac{3}{y} \neq 0$ nicht den Wert -2 annehmen. Daher gibt es in diesem Fall immer eine rationale Zahl x, für die die Gleichung (4) und daher die Gleichung (G) gilt.

Nur für $y = 0$ gilt die Gleichung (G) für keine rationale Zahl x.

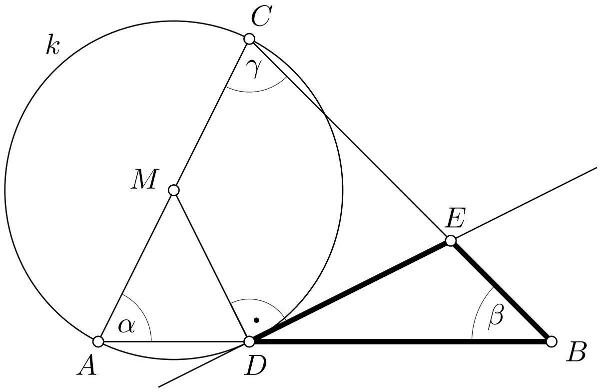
<u>560836 Lösung</u> *7 Punkte*

Nach Aufgabenstellung gelten:

(1) Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$.

(2) Der Kreis k hat den Mittelpunkt M und verläuft durch den Punkt A.

(3) Der Kreis k schneidet die Strecke $\overline{AB}$ in einem von A und B verschiedenen Punkt D.



L 560836

(4) Die Tangente an den Kreis k im Punkt D schneidet die Strecke $\overline{BC}$ in einem von B und C verschiedenen Punkt E.

Wegen (1), (2) und (3) sind die Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{DM}$ Radien des Kreises k und folglich gleich lang, siehe auch die Abbildung L 560836. Wegen (1) und (3) gilt $\sphericalangle DAM = \sphericalangle BAC$. Nach dem Basiswinkelsatz angewandt auf das gleichschenklige Dreieck ADM folgt hieraus

$$|\sphericalangle MDA| = |\sphericalangle DAM| = \alpha\,. \tag{5}$$

Da die Gerade DE wegen (4) Tangente an den Kreis k im Punkt D ist, folgt nach dem Satz über den Berührungsradius, dass die Geraden DE und DM aufeinander senkrecht stehen, es gilt also

$$|\sphericalangle EDM| = 90°\,. \tag{6}$$

Wegen (3) gilt $|\sphericalangle BDA| = 180°$. Wegen (1) und (4) liegen M und E auf derselben Seite bezüglich der Geraden AB. Daher gilt $|\sphericalangle BDE| + |\sphericalangle EDM| + |\sphericalangle MDA| = 180°$. Hieraus und aus (5) und (6) folgt

$$|\sphericalangle BDE| = 90° - \alpha\,. \tag{7}$$

Wegen (3) und (4) gilt

$$|\sphericalangle EBD| = |\sphericalangle CBA| = \beta\,. \tag{8}$$

Teil a) Angenommen, das Dreieck BED ist gleichseitig. Dann gilt

$$|\sphericalangle BDE| = |\sphericalangle DEB| = |\sphericalangle EBD| = 60°\,.$$

Wegen (8) folgt hieraus

$$\beta = 60°$$

sowie wegen (7)

$$\alpha = 90° - |\sphericalangle BDE| = 30°\,.$$

Nach dem Innenwinkelsatz angewandt auf das Dreieck ABC folgt nun

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 90°\,.$$

Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung, dass das Dreieck ABC spitzwinklig ist. Folglich ist die Annahme falsch. Das Dreieck BED kann nicht gleichseitig sein.

Teil b) Da das Dreieck BED gleichschenklig ist, gilt $|BE| = |DE|$, $|BD| = |DE|$ oder $|BD| = |BE|$.

Fall 1: Es gelte $|DE| = |BD|$. Für das Dreieck BED gilt dann nach dem Basiswinkelsatz und wegen (8)

$$|\sphericalangle DEB| = |\sphericalangle EBD| = \beta\,.$$

Nach dem Innenwinkelsatz angewandt auf das Dreieck BED und zusammen mit (7) folgt

$$180° = |\sphericalangle DEB| + |\sphericalangle EBD| + |\sphericalangle BDE| = \beta + \beta + (90° - \alpha)$$

und daher

$$2 \cdot \beta = \alpha + 90°\,.$$

Fall 2: Es gelte $|BD| = |BE|$. Für das Dreieck BED gilt dann nach dem Basiswinkelsatz

$$|\sphericalangle BDE| = |\sphericalangle DEB|\,.$$

Nach dem Innenwinkelsatz angewandt auf das Dreieck BED und zusammen mit (7) folgt

$$180° = |\sphericalangle DEB| + |\sphericalangle EBD| + |\sphericalangle BDE| = (90° - \alpha) + \beta + (90° - \alpha)$$

und daher

$$2 \cdot \alpha = \beta\,.$$

Fall 3: Es gelte $|DE| = |BE|$. Für das Dreieck BED gilt dann nach dem Basiswinkelsatz

$$|\sphericalangle BDE| = |\sphericalangle EBD| = \beta$$

und wegen (7) folgt

$$\beta = 90° - \alpha\,.$$

Nach dem Innenwinkelsatz angewandt auf das Dreieck ABC folgt daraus

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°\,.$$

Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung, dass das Dreieck ABC spitzwinklig ist. Folglich kann dieser Fall nicht eintreten.

Aus dieser vollständigen Fallunterscheidung folgt: Wenn das Dreieck BED gleichschenklig ist, dann gilt $2 \cdot \beta = \alpha + 90°$ oder $\beta = 2 \cdot \alpha$.

Teil c) Wir unterscheiden zwei Fälle in Bezug darauf, welche der Gleichungen $2 \cdot \beta = \alpha + 90°$ und $\beta = 2 \cdot \alpha$ gilt.

Fall 1: Es gelte $2 \cdot \beta = \alpha + 90°$. Dann gilt $\alpha = 2 \cdot \beta - 90°$. Wegen (7) gilt dann

$$|\sphericalangle BDE| = 90° - (2 \cdot \beta - 90°) = 180° - 2 \cdot \beta\,.$$

Nach dem Innenwinkelsatz angewandt auf das Dreieck BED folgt hieraus und aus (8)

$$|\sphericalangle DEB| = 180° - |\sphericalangle BDE| - \beta = 180° - (180° - 2 \cdot \beta) - \beta = \beta\,,$$

also

$$|\sphericalangle DEB| = |\sphericalangle EBD|\,.$$

Nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes ist das Dreieck BED gleichschenklig.

Fall 2: Es gelte $2 \cdot \alpha = \beta$. Dann gilt $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \beta$. Wegen (7) gilt dann

$$|\sphericalangle BDE| = 90° - \frac{1}{2} \cdot \beta\,.$$

Nach dem Innenwinkelsatz angewandt auf das Dreieck BED folgt hieraus und aus (8)

$$|\sphericalangle DEB| = 180° - |\sphericalangle BDE| - \beta = 180° - (90° - \frac{1}{2} \cdot \beta) - \beta = 90° - \frac{1}{2} \cdot \beta\,,$$

also

$$|\sphericalangle DEB| = |\sphericalangle BDE|\,.$$

Nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes ist das Dreieck BED gleichschenklig.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, folgt: Wenn $2 \cdot \beta = \alpha + 90°$ oder $\beta = 2 \cdot \alpha$ gilt, dann ist das Dreieck BED gleichschenklig.

Lösungsvariante zu Teil a) Man bearbeitet zuerst Teil b). Da $|DE| = |BE|$ im Fall 3 zum Widerspruch führt, kann das Dreieck BED nicht gleichseitig sein.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 560834	*Insgesamt: 6 Punkte*
Prinzipiell geeigneter Lösungsansatz	1 Punkt
Vollständige und begründete Herleitung	4 Punkte
Korrektes Ergebnis und Antwortsatz	1 Punkt

Aufgabe 560835	*Insgesamt: 7 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b)	2 Punkte
Teil c)	3 Punkte

Aufgabe 560836	*Insgesamt: 7 Punkte*
Grundlegende Winkelbeziehungen	2 Punkte
Teil a)	1 Punkt
Teil b)	2 Punkte
Teil c)	2 Punkte