56. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 9
Lösungen – 1. Tag

560931 Lösung *6 Punkte*

Wir bezeichnen einige der zu ermittelnden Ziffern mit Buchstaben:

$$a \;\cdot\; **b \;=\; 6 \;\cdot\; **5 \;+\; 2017$$

Wäre $a = 1$, so wäre das Produkt auf der linken Seite kleiner als 1000 im Gegensatz zur Summe auf der rechten Seite. Also gilt $a > 1$. Das Produkt auf der rechten Seite ist durch 2, 3 und 5 teilbar; 2017 ist hingegen durch keine dieser Zahlen teilbar. Folglich kann auch das Produkt auf der linken Seite und insbesondere auch a nicht durch 2, 3 oder 5 teilbar sein. Mit $a > 1$ folgt $a = 7$. Das zweite Produkt endet auf 0, folglich endet das erste Produkt auf 7 und mit $a = 7$ ergibt sich $b = 1$.

Die Gleichung lässt sich nun schreiben als

$$7 \cdot (10\,x + 1) = 6 \cdot (10\,y + 5) + 2017 \tag{1}$$

mit zweistelligen Zahlen x, y, in denen die Ziffern 0, 1 und 7 nicht vorkommen dürfen. Die Gleichung (1) ist äquivalent zu

$$70\,x = 60\,y + 2040$$

und daher zu $7\,x = 6\,y + 204$. Da 204 und $6\,y$ durch 6 teilbar sind, ist auch $7\,x$ und daher x durch 6 teilbar. Andererseits gilt $y \geq 23$, da y zweistellig ist und die Ziffern $0, 1$ und 7 nicht enthalten darf. Hieraus folgt nacheinander $6\,y \geq 138$, $7\,x \geq 342$ und daher $x \geq 49$. Wir gehen also für x die durch 6 teilbaren zweistelligen Zahlen mit $x \geq 49$ systematisch durch und bestimmen dazu aus $7\,x = 6\,y + 204$ die zugehörigen y-Werte:

x	54	60	66	72	78	84	90	96
y	29	36	43	50	57	64	71	78

Der erste Fall liefert eine zulässige Belegung. In den anderen Fällen wird jedes Mal eine Ziffer doppelt oder eine 7 verwendet. Die einzige Lösung ist also

$$7 \cdot 541 = 6 \cdot 295 + 2017\,.$$

560932 Lösung *7 Punkte*

Es sei (x, y) ein Paar reeller Zahlen, welches beide Gleichungen erfüllt. Ausmultiplizieren der Klammern und Addition der beiden Gleichungen ergeben

$$x^2 + y^2 + 10 = 34 - 6\,x - 10\,y + x^2 + y^2\,.$$

Weitere Vereinfachung führt auf

$$6\,x + 10\,y = 24, \quad x + \frac{5}{3}\,y = 4 \quad \text{und schließlich} \quad x = 4 - \frac{5}{3}\,y\,.$$

Setzt man dies in die Gleichung $0 = x^2 + 9 - (5-y)^2$ ein, so erhält man nacheinander

$$\begin{aligned} 0 &= \left(4 - \frac{5}{3}\,y\right)^2 + 9 - \left(25 - 10\,y + y^2\right) \\ &= 16 - \frac{40}{3}\,y + \frac{25}{9}\,y^2 + 9 - 25 + 10\,y - y^2 \\ &= \frac{16}{9}\,y^2 - \frac{10}{3}\,y = y \cdot \left(\frac{16}{9}\,y - \frac{10}{3}\right)\,. \end{aligned}$$

Es sind also zwei Fälle möglich:

Fall 1: $y = 0$. Einsetzen in $x = 4 - \frac{5}{3}y$ liefert $x = 4$ und damit $(x, y) = (4, 0)$ als möglichen Lösungskandidaten.

Fall 2: $\frac{16}{9}\,y = \frac{10}{3}$, also $y = \frac{15}{8}$. Einsetzen in $x = 4 - \frac{5}{3}y$ liefert $x = \frac{7}{8}$ und damit $(x, y) = \left(\frac{15}{8}, \frac{7}{8}\right)$ als möglichen Lösungskandididaten.

Die Probe zeigt, dass tatsächlich beide $(x, y) \in \left\{(4, 0), \left(\frac{7}{8}, \frac{15}{8}\right)\right\}$ Lösungen des Gleichungssystems der Aufgabenstellung sind.

560933 Lösung *7 Punkte*

Vorbemerkungen: Ein Viereck $ABCD$, welches nicht konvex ist, besitzt eine Diagonale, welche nicht im Inneren des Vierecks liegt. Spiegelt man einen der Eckpunkte des Vierecks, welcher nicht auf dieser Diagonalen liegt, an dieser Diagonalen, so erhält man ein Viereck mit den gleichen Seitenlängen und echt größerem Flächeninhalt. Es genügt deswegen im Folgenden, konvexe Vierecke $ABCD$ zu betrachten.

Ein Dreieck ABC mit Seitenlängen $|BC| = a$ und $|AC| = b$ hat einen Flächeninhalt

$$\mathrm{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\,a\,h_a \leq \frac{1}{2}\,a\,b,$$

da die Länge h_a der Höhe aus A auf die Gerade BC nie größer als die Länge der Seite $\overline{AC}$ ist. Gleichheit gilt genau für $h_a = b$, wenn also das Dreieck rechtwinklig bei C ist.

Teil a) Die Diagonale $\overline{BD}$ zerlegt das Viereck in zwei Teildreiecke. Für den Flächeninhalt des Teildreiecks ABD gilt nach der zweiten Vorbemerkung

$$\mathrm{A}_{ABD} \leq \frac{1}{2}\,|AB| \cdot |DA| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 9 = 9\,.$$

Ebenso gilt: $\mathrm{A}_{BCD} \leq \frac{1}{2}\,|BC| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = 21$. Damit gilt $\mathrm{A}_{ABCD} \leq 9 + 21 = 30$.

Teil b) Die Seitenlängen des Vierecks $ABCD$ seien mit $|AB| = a_1$, $|BC| = b_1$, $|CD| = a_2$ und $|DA| = b_2$ bezeichnet. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit $a_1 = 2$ und $b_1 < b_2$ annehmen – beides kann durch zyklische Umbenennung der Eckpunkte bzw. durch eine Orientierungsänderung des Umlaufsinns erreicht werden, was an der geometrischen Situation nichts ändert.

Es sind damit drei Fälle

$$(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \{(2, 6, 7, 9), (2, 7, 6, 9), (2, 6, 9, 7)\}$$

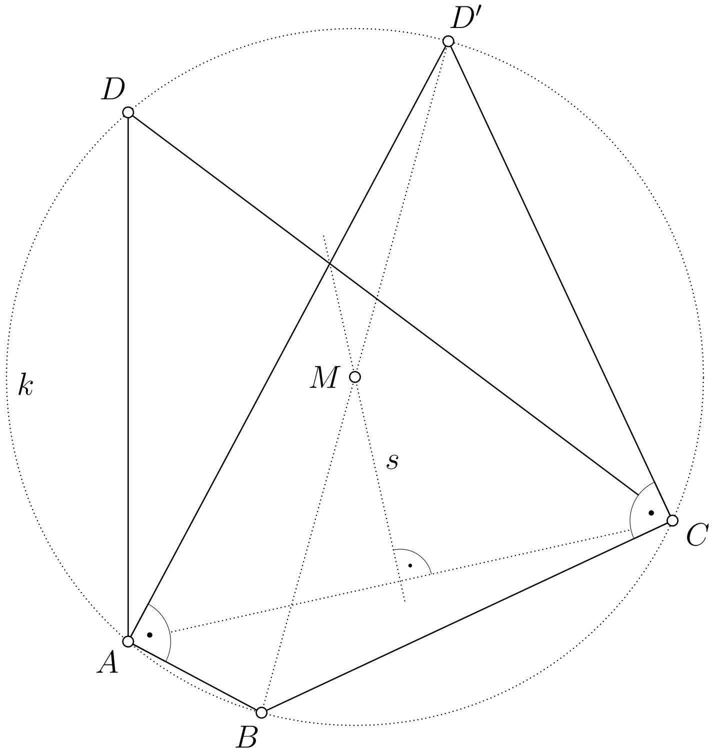
zu untersuchen.

Fall 1: $(a_1, b_1, a_2, b_2) = (2, 6, 7, 9)$. Dies wurde bereits im Teil a) untersucht.

Fall 2: $(a_1, b_1, a_2, b_2) = (2, 7, 6, 9)$. Wir können wie im Fall a) argumentieren, da die Längen b_1 und a_2 symmetrisch in die dortigen Überlegungen eingehen.

Fall 3: $(a_1, b_1, a_2, b_2) = (2, 6, 9, 7)$. In diesem Fall spiegeln wir das Dreieck ACD an der Mittelsenkrechten s von $\overline{AC}$. Dabei geht A in C, C in A und D in D' über. Das Viereck $ABCD'$ ist flächengleich zum Viereck $ABCD$, hat aber Seitenlängen $(2, 6, 7, 9)$ und damit nach Fall 1 einen Flächeninhalt höchstens gleich 30.

Damit ist gezeigt, dass in jedem Fall der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ höchstens gleich 30 ist.



L 560933

Teil c) In den Fällen 1 und 2 aus Teil b) wird der Flächeninhalt 30 höchstens dann erreicht, wenn das Viereck rechtwinklig bei A und C ist. Nach dem Thalessatz liegen A und C dann auf dem Thaleskreis k mit dem Durchmesser $\overline{BD}$ und jedes solche Viereck mit maximalem Flächeninhalt 30 ist ein Sehnenviereck.

Im Fall 3 aus Teil b) wird der Flächeninhalt 30 höchstens dann erreicht, wenn auch das Viereck $ABCD'$ den Flächeninhalt 30 hat, also dessen Eckpunkte auf dem Thaleskreis k mit dem Durchmesser $\overline{BD'}$ liegen, siehe Abbildung L 560933. Da s als Mittelsenkrechte der Sehne $\overline{AC}$ durch den Mittelpunkt M von k geht, geht k bei Spiegelung an s in sich über. Folglich liegt auch D auf k und das Viereck $ABCD$ ist ebenfalls ein Sehnenviereck.

In allen drei Fällen ist der Umkreis ein Thaleskreis mit dem Durchmesser $\overline{BD}$ bzw. $\overline{BD'}$. Die Länge d dieses Durchmessers berechnet sich nach dem Satz des Pythagoras jeweils aus $d^2 = |BD|^2 = 2^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2 = 85$. Für den Radius von k erhalten wir also

$$r = \frac{1}{2}\,d = \frac{1}{2}\,\sqrt{85}$$

in jedem der Fälle, in denen $\mathrm{A}_{ABCD} = 30$ ist.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 560931	*Insgesamt: 6 Punkte*
Angabe der korrekten Lösung	1 Punkt
Einschränkung $a = 7$ oder vergleichbare Aussage	2 Punkte
Herleiten der korrekten Lösung	2 Punkte
Einzigkeit der korrekten Lösung	1 Punkt

Aufgabe 560932	*Insgesamt: 7 Punkte*
Ableiten einer Bestimmungsgleichung in einer Variablen	3 Punkte
Auswerten der Bestimmungsgleichung	1 Punkt
Angabe der korrekten Lösungsmenge	2 Punkte
Probe oder Hinweis darauf	1 Punkt

Aufgabe 560933	*Insgesamt: 7 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b) und c) – Sehnenviereck, Fall 1 und 2	2 Punkte
Teil b) und c) – Sehnenviereck, Fall 3	2 Punkte
Teil c) – Bestimmung des Umkreisradius	1 Punkt