56. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 9
Lösungen – 2. Tag

560934 Lösung *6 Punkte*

Vorbemerkung: Die Zahl d ist genau dann das arithmetische Mittel von n Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wenn

$$(x_1 - d) + \cdots + (x_n - d) = 0 \tag{1}$$

gilt, denn diese Bedingung ist äquivalent zu $d = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + \cdots + x_n)$.

Streicht man einige der Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ mit der Eigenschaft, dass die gestrichenen Zahlen das gleiche arithmetische Mittel d haben, dann gilt (1) sowohl für alle Zahlen als auch für die gestrichenen, folglich also auch für die nicht gestrichenen Zahlen.

Teil a) Ja, dies ist stets möglich.

Der Datensatz kann als Menge $\{a, a+1, a+2, \ldots, a+99\}$ beschrieben werden, wobei a eine ganze Zahl ist. Jedes seiner 100 Elemente lässt sich in genau eines der 50 Paare $(a, a+99)$, $(a+1, a+98), \ldots, (a+49, a+50)$ einordnen. Alle diese Paare $(a+i, a+99-i)$ wie auch der Datensatz selbst haben das gleiche arithmetische Mittel

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{100} \cdot (a + (a+1) + \cdots + (a+98) + (a+99)) \\ &= \frac{1}{2}\,((a+i) + (a+99-i)) = a + \frac{99}{2}\,. \end{aligned}$$

Das Streichen eines kompletten Paares ändert also das arithmetische Mittel des Datensatzes nicht.

Beim willkürlichen Streichen können genau eine Zahl, beide Zahlen oder keine der beiden Zahlen eines jeden Paares gestrichen worden sein. In den Paaren mit genau einer willkürlich gestrichenen Zahl kann man nun die verbliebene Zahl dieses Paares streichen. Für komplett gestrichene Paare kann man gezielt ein unversehrtes Paar streichen. Dazu ist es erforderlich, dass noch mindestens genauso viele unversehrte Paare wie komplett gestrichene Paare vorhanden sind.

Da es insgesamt 50 Paare gibt und nur 25 Zahlen gestrichen wurden, verbleiben mindestens 25 unversehrte Paare. Andererseits können anfangs höchstens 12 Paare komplett gestrichen worden sein. Damit lässt sich tatsächlich für jedes komplett gestrichene Paar nachträglich ein unversehrtes Paar streichen.

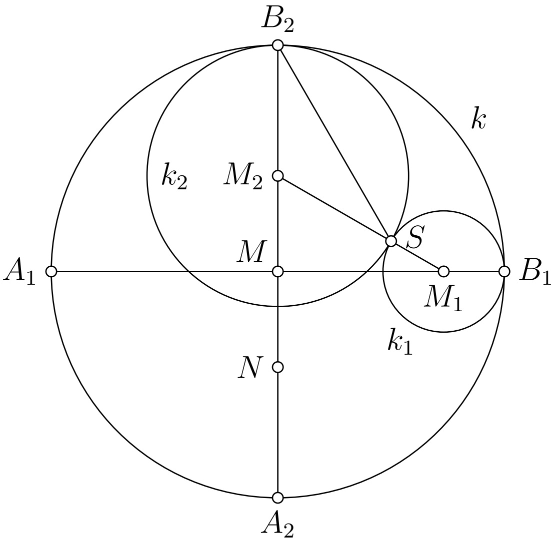
Da nach der beschriebenen Strategie am Ende nur komplette Paare gestrichen sind, deren arithmetisches Mittel jeweils mit dem des ursprünglichen Datensatzes übereinstimmt, hat auch der verbliebene Datensatz dieses arithmetische Mittel.

Teil b) Nein, dies ist nie möglich.

Der Datensatz kann wieder als Menge $\{a, a+1, a+2, \ldots, a+99\}$ beschrieben werden. Das arithmetische Mittel berechnet sich wie in Teil a) zu $d = a + \frac{99}{2}$. Wenn die 75 ungestrichenen Zahlen das gleiche arithmetische Mittel haben sollen, muss ihre Summe $75 \cdot d = 75\,a + 75 \cdot \frac{99}{2}$ betragen. $75 \cdot \frac{99}{2}$ ist jedoch keine ganze Zahl und damit ist $75 \cdot d$ auch nicht Summe von ganzen Zahlen. Eine Auswahl mit den geforderten Eigenschaften ist also nicht möglich.

560935 Lösung *7 Punkte*

Mit M sei der Mittelpunkt des Kreises k bezeichnet; dieser halbiert zugleich die Strecken $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{A_2B_2}$.



Bekanntlich liegen der Berührpunkt zweier Kreise und ihre Mittelpunkte auf einer Geraden. Da sich k_1 und k_2 in S von außen berühren, ist damit $|M_1M_2| = r_1 + r_2$; außerdem liegen die Punkte M_1 und M_2 jeweils innerhalb der Strecken $\overline{MB_1}$ und $\overline{MB_2}$, da k_1 und k_2 kleinere Kreise sind als k.

Ferner gilt

$$r = |MB_2| = |MM_2| + |M_2B| = |MM_2| + r_2$$

und daher $|MM_2| = r - r_2$. Analog zeigt man $|MM_1| = r - r_1$.

Nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz (bzw. nach dem Außenwinkelsatz für das gleichschenklige Dreieck B_2M_2S) gilt

$$|\sphericalangle MM_2M_1| = |\sphericalangle MM_2S| = 2 \cdot |\sphericalangle M_2B_2S| = 60^\circ .$$

Damit ist aber das rechtwinklige Dreieck MM_1M_2 als „Hälfte“ eines passend gewählten gleichseitigen Dreiecks M_1M_2N interpretierbar. Insbesondere gilt: $|M_1M_2| = 2 \cdot |MM_2|$, also $r_1 + r_2 = 2 \cdot (r - r_2)$ und somit $r_1 = 2\,r - 3\,r_2$.

Da das Dreieck MM_1M_2 rechtwinklig ist, gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$|MM_1|^2 + |MM_2|^2 = |M_1M_2|^2 = 4\;|MM_2|^2\ ,$$

also $|MM_1|^2 = 3\;|MM_2|^2$ und damit $|MM_1| = \sqrt{3}\;|MM_2|$ oder

$$r - r_1 = \sqrt{3}\,(r - r_2).$$

Einsetzen von $r_1 = 2\,r - 3\,r_2$ liefert $3\,r_2 - r = \sqrt{3}\,(r - r_2)$ und folglich $(3+\sqrt{3})\,r_2 = (\sqrt{3}+1)\,r$, also

$$r_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{3+\sqrt{3}} \cdot r = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}\,\big(\sqrt{3}+1\big)} \cdot r = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot r\,.$$

Für $r = 3\,\mathrm{cm}$ ergibt sich insbesondere $r_2 = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ und daher $r_1 = 2\,r - 3\,r_2 = (6 - 3\sqrt{3})\,\mathrm{cm}$.

560936 Lösung *7 Punkte*

Teil a) Die Kanten der 36×36 Kästchen liegen auf je 37 senkrechten und waagerechten Linien. Zeichnet man für alle Kästchen ihre waagerechten Begrenzungen ein, braucht man $37 \cdot 36$ Kanten. Dabei ist noch kein Kästchen umrandet, weil die senkrechten Kanten noch fehlen. Zeichnet man nun in jeder Zeile nur die erste, dritte, fünfte, …, 35. und 37. senkrechte Kante ein, werden dafür weitere $19 \cdot 36$ Kanten eingezeichnet. Trotzdem fehlt so für jedes Kästchen noch eine Begrenzung zum linken oder rechten Nachbarkästchen. Man kann also $37 \cdot 36 + 19 \cdot 36 = 2016$ Kanten einzeichnen, ohne ein Kästchen vollständig zu begrenzen.

Teil b) Es gibt insgesamt 37^2 Gitterpunkte sowie $37 \cdot 36$ waagerechte und $37 \cdot 36$ senkrechte Kanten. Jede Kante gehört zu maximal zwei Kästchen. Eine nicht eingezeichnete Kante sorgt also bei maximal zwei Kästchen dafür, dass sie nicht vollständig umrandet sind. Ist also keines der 36^2 Kästchen vollständig umrandet, müssen mindestens $\frac{1}{2} \cdot 36^2$ Kanten nicht eingezeichnet sein, und es können nicht mehr als

$$2 \cdot 37 \cdot 36 - \frac{1}{2} \cdot 36^2 = 2016$$

Kanten eingezeichnet sein. Bei 2017 eingezeichneten Kanten muss also einer der Spieler einen Punkt für ein vollständig umgrenztes Kästchen erhalten haben.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 560934 *Insgesamt: 6 Punkte*

Vorüberlegungen wie die Bestimmung des arithmetischen Mittels der gegebenen 100 Zahlen .... 1 Punkt
Teil a) .... 3 Punkte
Teil b) .... 2 Punkte

Aufgabe 560935 *Insgesamt: 7 Punkte*

Skizze .... 1 Punkt
Kollinearitäten, Seitenlängen im Dreieck MM_1M_2 als Terme in r, r_1, r_2 .... 1 Punkt
Innenwinkel im Dreieck MM_1M_2, Erkennen als halbes gleichseitiges Dreieck .... 2 Punkte
Herleitung eines linearen Gleichungssystems für r, r_1, r_2 .... 2 Punkte
Korrektes Ergebnis .... 1 Punkt

Aufgabe 560936 *Insgesamt: 7 Punkte*

Teil a) .... 2 Punkte
Teil b) .... 5 Punkte