56. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 10
Lösungen – 1. Tag

561031 Lösung *6 Punkte*

Wir bezeichnen einige der zu ermittelnden Ziffern mit Buchstaben:

$$a \;\cdot\; **b \;=\; 6 \;\cdot\; **5 \;+\; 2017$$

Wäre $a = 1$, so wäre das Produkt auf der linken Seite kleiner als 1000 im Gegensatz zur Summe auf der rechten Seite. Also gilt $a > 1$. Das Produkt auf der rechten Seite ist durch 2, 3 und 5 teilbar; 2017 ist hingegen durch keine dieser Zahlen teilbar. Folglich kann auch das Produkt auf der linken Seite und insbesondere auch a nicht durch 2, 3 oder 5 teilbar sein. Mit $a > 1$ folgt $a = 7$. Das zweite Produkt endet auf 0, folglich endet das erste Produkt auf 7 und mit $a = 7$ ergibt sich $b = 1$.

Die Gleichung lässt sich nun schreiben als

$$7 \cdot (10\,x + 1) = 6 \cdot (10\,y + 5) + 2017 \tag{1}$$

mit zweistelligen Zahlen x, y, in denen die Ziffern 0, 1 und 7 nicht vorkommen dürfen. Die Gleichung (1) ist äquivalent zu

$$70\,x = 60\,y + 2040$$

und daher zu $7\,x = 6\,y + 204$. Da 204 und $6\,y$ durch 6 teilbar sind, ist auch $7\,x$ und daher x durch 6 teilbar. Andererseits gilt $y \geq 23$, da y zweistellig ist und die Ziffern $0, 1$ und 7 nicht enthalten darf. Hieraus folgt nacheinander $6\,y \geq 138$, $7\,x \geq 342$ und daher $x \geq 49$. Wir gehen also für x die durch 6 teilbaren zweistelligen Zahlen mit $x \geq 49$ systematisch durch und bestimmen dazu aus $7\,x = 6\,y + 204$ die zugehörigen y-Werte:

x	54	60	66	72	78	84	90	96
y	29	36	43	50	57	64	71	78

Der erste Fall liefert eine zulässige Belegung. In den anderen Fällen wird jedes Mal eine Ziffer doppelt oder eine 7 verwendet. Die einzige Lösung ist also

$$7 \cdot 541 = 6 \cdot 295 + 2017\,.$$

561032 Lösung *7 Punkte*

Die erste Gleichung ist gleichbedeutend mit $\sqrt{y^2 + 3} = 3 - x$. Quadrieren liefert

$$y^2 + 3 = (3 - x)^2 = 9 - 6\,x + x^2. \tag{1}$$

Analog erhält man aus der zweiten Gleichung

$$x^2 + 6 = 36 - 12\,y + y^2\,. \tag{2}$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen und Vereinfachung folgt nacheinander

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+9=45-6\,x-12\,y+x^2+y^2\,, \\ & 6\,x+12\,y=36 \\ \text{und schließlich}\quad & x=6-2\,y\,. \end{aligned}$$

Setzt man dies in (2) ein, so erhält man nacheinander

$$\begin{aligned} & (6-2\,y)^2+6=36-12\,y+y^2\,, \\ & 36-24\,y+4y^2+6=36-12\,y+y^2\,, \\ & 3y^2-12\,y+6=0 \\ \text{und schließlich}\quad & y^2-4\,y+2=0\,. \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen $y=2+\sqrt{2}$ und $y=2-\sqrt{2}$.

Aus $y=2-\sqrt{2}$ und $x=6-2\,y$ folgt $x=2+2\,\sqrt{2}$. Dann wäre aber $x>3$, welches der ersten Gleichung des Gleichungssystems in der Aufgabenstellung widerspricht. Dieser Fall führt also zu keiner Lösung des Ausgangssystems.

Aus $y=2+\sqrt{2}$ und $x=6-2\,y$ folgt $x=2-2\,\sqrt{2}$.

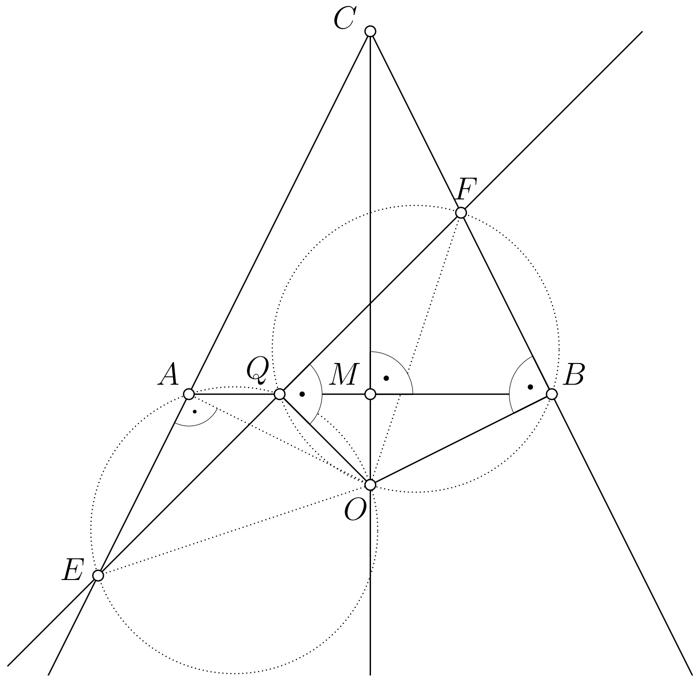
Einziger Lösungskandidat ist damit das Paar $(x,y)=\left(2-2\,\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right)$.

Als Probe ergibt sich aus $x=2-2\,\sqrt{2}$ und $y=2+\sqrt{2}$ Schritt für Schritt

$$\begin{aligned} & y^2+3=9+4\,\sqrt{2}=\left(1+2\,\sqrt{2}\right)^2\,, \\ & x+\sqrt{y^2+3}=\left(2-2\,\sqrt{2}\right)+\left(1+2\,\sqrt{2}\right)=3 \\ \text{sowie}\quad & x^2+6=18-8\,\sqrt{2}=\left(4-\sqrt{2}\right)^2\,, \\ & y+\sqrt{x^2+6}=\left(2+\sqrt{2}\right)+\left(4-\sqrt{2}\right)=6\,, \end{aligned}$$

womit bestätigt ist, dass dieses Paar tatsächlich Lösung des in der Aufgabenstellung gegebenen Gleichungssystems ist.

Einzige Lösung des in der Aufgabenstellung gegebenen Gleichungssystems ist damit das Paar $(x,y)=\left(2-2\,\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right)$.



L 561033 a

α bezeichne die Größe eines Basiswinkels im gleichschenkligen Dreieck ABC.

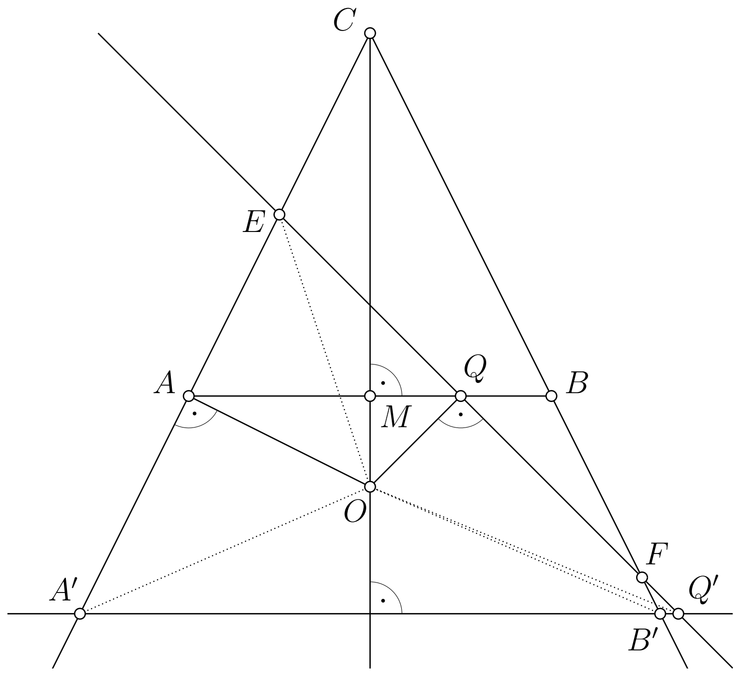
Wegen der rechten Winkel EAO und EQO liegen A und Q auf dem Thaleskreis k_1 über dem Durchmesser $\overline{OE}$, siehe Abbildung L 561033 a. Da A und E auf demselben Bogen von k_1 über der Sehne $\overline{OQ}$ liegen, folgt nach dem Peripheriewinkelsatz $|\sphericalangle OEQ| = |\sphericalangle OAQ|$, also $|\sphericalangle OEQ| = 90° - \alpha$.

Mit $|\sphericalangle OAC| = |\sphericalangle EAO| = 90°$ folgt im gleichschenkligen Dreieck ABC aus Symmetriegründen auch $|\sphericalangle CBO| = |\sphericalangle FBO| = 90°$. Da auch OQF ein rechter Winkel ist, liegen B und Q auf dem Thaleskreis k_2 über dem Durchmesser $\overline{FO}$. Da B und F auf demselben Bogen von k_2 über der Sehne $\overline{OQ}$ liegen, folgt nach dem Peripheriewinkelsatz $|\sphericalangle QFO| = |\sphericalangle QBO|$, also $|\sphericalangle QFO| = 90° - \alpha$.

Damit sind die Dreiecke EOQ und FOQ kongruent nach (wsw), denn sie haben beide je einen Winkel von $90° - \alpha$ und einen rechten Winkel sowie die gemeinsame Seite $\overline{OQ}$.

Da $\overline{EQ}$ und $\overline{FQ}$ einander entsprechende Seiten der beiden Dreiecke sind, gilt damit $|EQ| = |FQ|$ wie behauptet.

Lösungsvariante:



L 561033 b

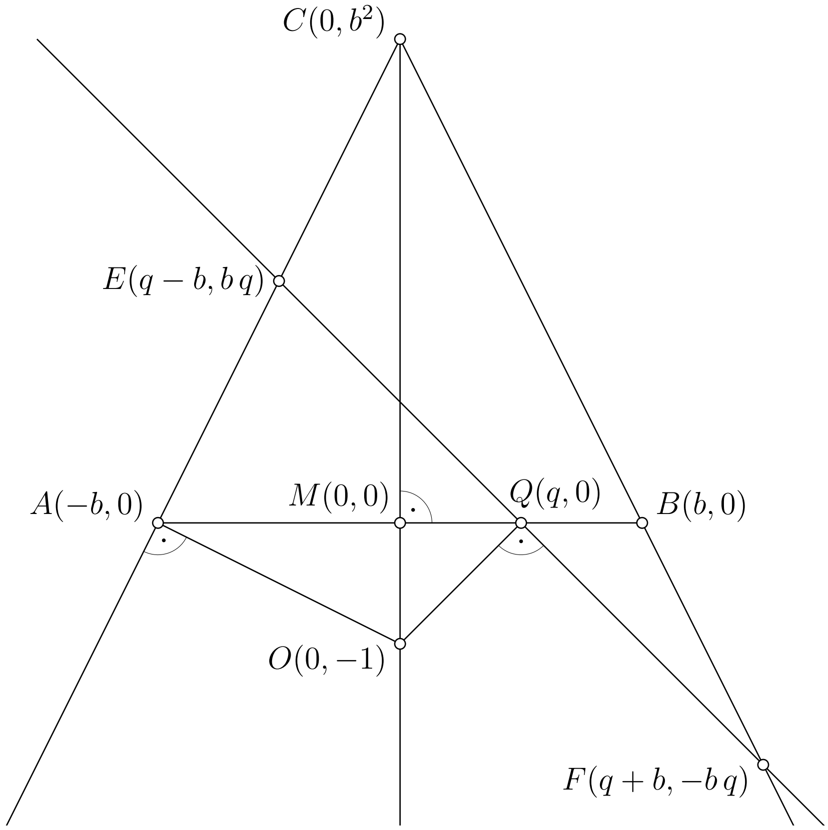
Die Strecke $\overline{A'Q'}$ entstehe durch Streckung der Strecke $\overline{AQ}$ mit Zentrum E um den Faktor 2. B' bezeichne den Schnittpunkt der Geraden BC und $A'Q'$. Wegen $AB \parallel A'B'$ ist die Winkelhalbierende CO ebenfalls Mittelsenkrechte zu $|A'B'|$.

Nach Konstruktion ist Q der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EQ'}$. Wir zeigen, dass die Skizze in Abbildung L 561033 b nicht ganz korrekt ist, sondern in Wirklichkeit $F = B' = Q'$ gilt, womit der geforderte Beweis erbracht ist, dass Q der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EF}$ ist.

Nach Konstruktion ist OQ die Mittelsenkrechte von $\overline{EQ'}$ und damit $|Q'O| = |EO|$. Weiter gilt $|EO| = |A'O|$, da mit $|EA| = |AA'|$, gemeinsamer Seite $\overline{OA}$ und rechten Winkeln bei A die Dreiecke EAO und $A'AO$ kongruent sind. Schließlich ist $|OA'| = |OB'|$ aus Symmetriegründen. Die Punkte A', B' und Q' liegen also alle auf dem Kreis um O mit dem Radius $|EO|$ und gleichzeitig auf der Geraden $A'B'$. Da ein Kreis mit einer Geraden nur zwei Punkte gemeinsam haben kann, fallen zwei der Punkte zusammen. Da weder Q' noch B' auf der Geraden CA liegen, fallen beide Punkte nicht mit A' zusammen. Also gilt $B' = Q'$ und damit auch $Q' = F$, denn F ist der Schnittpunkt von EQ mit BC.

Bemerkung: Im Fall $Q = M$, gleichbedeutend mit $A = E$, sind die Dreiecke EAO und $A'AO$ ausgeartet. Die Schlussfolgerungen gelten offensichtlich dennoch auch in diesem Fall.

Weitere Lösungsvariante:



L 561033 c

Wir lösen die Aufgabe durch Anwendung der Koordinatenmethode und wählen dazu ein kartesisches Koordinatensystem mit AB als x-Achse und MC als y-Achse, siehe Abbildung L 561033 c. Der Ursprung ist also $M(0,0)$. Der Punkt O liegt nach Voraussetzung auf der y-Achse. Wir wählen die Koordinateneinheit so, dass $O(0,-1)$ gilt.

Die Punkte A und B liegen auf der x-Achse symmetrisch zu M, haben also die Koordinaten $A(-b,0)$ und $B(b,0)$, wobei wir $b>0$ annehmen können. Q liegt ebenfalls auf der x-Achse, so dass wir $Q(q,0)$ mit $-b<q<b$ setzen.

C hat die Koordinaten $C(0,c)$, wobei $1\cdot c=b^2$ nach dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck OCA, also $c=b^2$, gilt.

Da OQ den Anstieg $\frac{1}{q}$ hat (im Fall $q=0$ steht OQ senkrecht auf der x-Achse), hat die dazu senkrechte Gerade g durch E und F den Anstieg $-q$ und damit die Geradengleichung $y=-q\,x+a$. Das Absolutglied a kann aus der Bedingung $Q\in g$ zu $a=q^2$ bestimmt werden.

E liegt weiter auf der Geraden AC mit der Gleichung $y=bx+b^2$. Die Koordinaten von E sind also Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} y &= -qx+q^2,\\ y &= bx+b^2. \end{aligned}$$

Wegen $b\neq -q$ ergibt sich eindeutig $E\,(q-b,b\,q)$.

Ähnlich berechnen wir die Koordinaten von F zu $F\,(q+b,-b\,q)$ und schließlich die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke $\overline{EF}$ als arithmetisches Mittel der Koordinaten von E und F zu $(q,0)$. Damit ist Q der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EF}$.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 561031	*Insgesamt: 6 Punkte*
Angabe der korrekten Lösung	1 Punkt
Einschränkung $a = 7$ oder vergleichbare Aussage	2 Punkte
Herleiten der korrekten Lösung	2 Punkte
Einzigkeit der korrekten Lösung	1 Punkt

Aufgabe 561032	*Insgesamt: 7 Punkte*
Ableiten einer Bestimmungsgleichung in einer Variablen	3 Punkte
Auswerten der Bestimmungsgleichung	2 Punkte
Probe	2 Punkte

Aufgabe 561033	*Insgesamt: 7 Punkte*
Zielführende Erweiterung der ursprünglichen geometrischen Figur	2 Punkte
Erkennen und Begründen zielführender geometrischer Zusammenhänge (Thaleskreise, Winkelbeziehungen, Koordinatenberechnungen)	2 Punkte
Erfolgreicher Abschluss der Beweisführung	2 Punkte
Korrekte Berücksichtigung aller möglichen Lagebeziehungen $\|AQ\| < \|BQ\|$ bzw. $\|AQ\| = \|BQ\|$ bzw. $\|AQ\| > \|BQ\|$	1 Punkt