56. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Lösungen – 1. Tag

561231 Lösung *6 Punkte*

Die Gleichung lässt sich äquivalent umformen zu

$$(x+1)(x^4+x^2)=x+1$$

und

$$(x+1)(x^4+x^2-1)=0\,.$$

Angenommen, x ist eine Lösung der gegebenen Gleichung. Da ein Produkt genau dann null ist, wenn einer der beiden Faktoren null ist, muss dann einer der beiden folgenden Fälle vorliegen.

Fall 1: $x+1=0$. Dies ergibt eine Lösung $x_1=-1$.

Fall 2: $x^4+x^2-1=0$. Dies ist eine biquadratische Gleichung. Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert zwei mögliche Werte für $y=x^2$,

$$y_1=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}} \qquad \text{und} \qquad y_2=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}\,.$$

Die Gleichung $x^2=y_1$ hat keine reelle Lösung, da y_1 negativ ist. Dagegen ergibt $x^2=y_2$ zwei weitere Lösungen,

$$x_{2,3}=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\,.$$

Ergebnis: Es gibt also genau drei reelle Zahlen, die die gegebene Gleichung lösen, nämlich

$$x_1=-1\,, \qquad x_2=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \qquad \text{und} \qquad x_3=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\,.$$

Bemerkung: Eine Probe ist hier entbehrlich, sobald an einer Schülerlösung deutlich erkennbar ist, dass alle Umformungsschritte äquivalent sind.

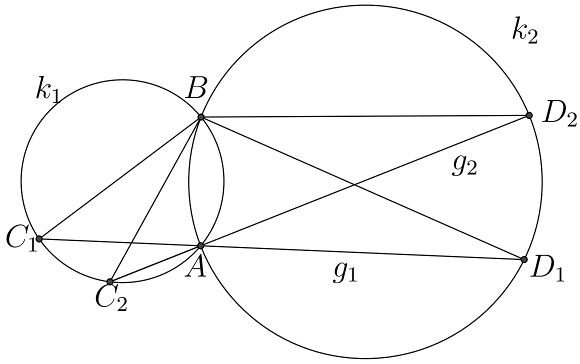
561232 Lösung *7 Punkte*

Erste Lösung: Zunächst wird ein Hilfssatz bewiesen:

Hilfssatz: Die Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in den Punkten A und B. Die Geraden g_1 und g_2 gehen durch den Punkt A und schneiden die Kreise k_1 und k_2 in den von A verschiedenen Punkten C_1 beziehungsweise C_2 und D_1 beziehungsweise D_2. Dann sind die Dreiecke BC_1D_1 und BC_2D_2 ähnlich.

Beweis: Es wird eine Fallunterscheidung bezüglich der Lage der Punkte A, C_1 und D_1 beziehungsweise A, C_2 und D_2 auf den jeweiligen Geraden vorgenommmen. Betrachtet man die gegebene Konstellation und eine einzelne Gerade g_i, so ist zu erkennen, dass die Fälle der Fallunterscheidung bezüglich der Lage der Punkte auf g_i eineindeutig den Möglichkeiten entsprechen, auf welchen der durch A und B begrenzten Kreisbögen der Kreise k_j die Punkte C_i und D_i liegen.

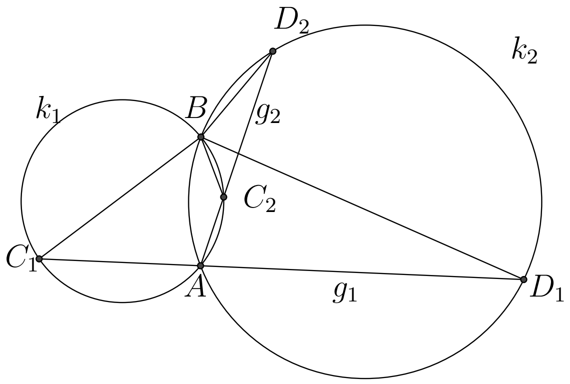
Fall 1: Der Punkt A liegt zwischen den Punkten C_1 und D_1, und der Punkt A liegt zwischen den Punkten C_2 und D_2 (Abbildung L 561232 a).



L 561232 a

Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes über der Sehne $\overline{AB}$ gilt $|\sphericalangle AC_1B| = |\sphericalangle AC_2B|$ und $|\sphericalangle BD_1A| = |\sphericalangle BD_2A|$. Also sind die Dreiecke BC_1D_1 und BC_2D_2 ähnlich.

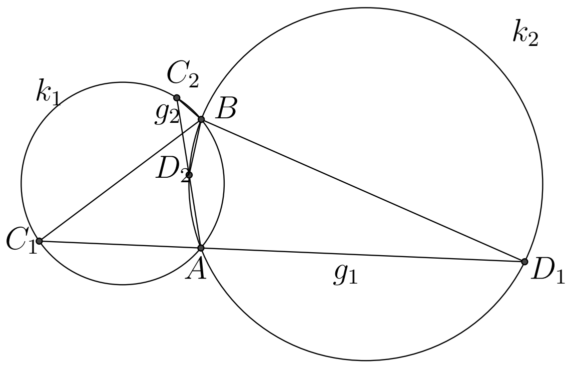
Fall 2: Der Punkt A liegt zwischen den Punkten C_1 und D_1, und der Punkt C_2 liegt zwischen den Punkten A und D_2 (Abbildung L 561232 b).



L 561232 b

Da das Viereck BC_1AC_2 ein Sehnenviereck ist, gilt $|\sphericalangle AC_1B| = |\sphericalangle D_2C_2B|$. Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes gilt $|\sphericalangle BD_1A| = |\sphericalangle BD_2A|$. Also sind die Dreiecke BC_1D_1 und BC_2D_2 ähnlich.

Fall 3: Der Punkt A liegt zwischen den Punkten C_1 und D_1, und der Punkt D_2 liegt zwischen den Punkten A und C_2 (Abbildung L 561232 c).



L 561232 c

Da das Viereck BD_2AD_1 ein Sehnenviereck ist, gilt $|\sphericalangle BD_1A| = |\sphericalangle BD_2C_2|$. Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes gilt $|\sphericalangle AC_1B| = |\sphericalangle AC_2B|$. Also sind die Dreiecke BC_1D_1 und BC_2D_2 ähnlich.

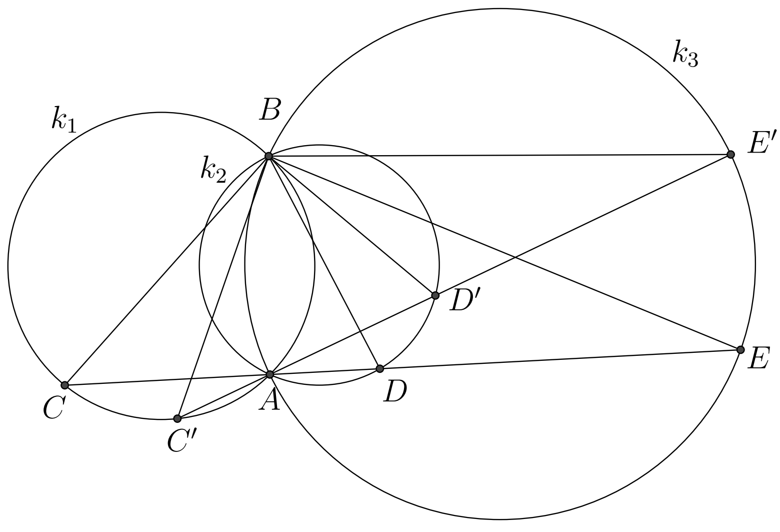
Weil sich alle anderen Fälle auf diese drei Fälle zurückführen lassen, ist damit der Hilfssatz bewiesen.

Eine weitere Sekante durch A schneide die Kreise k_1, k_2 und k_3 außer im Punkte A in den Punkten C', D' beziehungsweise E' (Abbildung L 561232 d). Aufgrund des Hilfssatzes sind sowohl die Dreiecke CDB und $C'D'B$ als auch die Dreiecke DEB und $D'E'B$ ähnlich. Also gilt

$$|CD| : |C'D'| = |DB| : |D'B| = |DE| : |D'E'| \ .$$

Folglich gilt auch

$$|CD| : |DE| = |C'D'| : |D'E'| \ .$$



L 561232 d

Zweite Lösung:

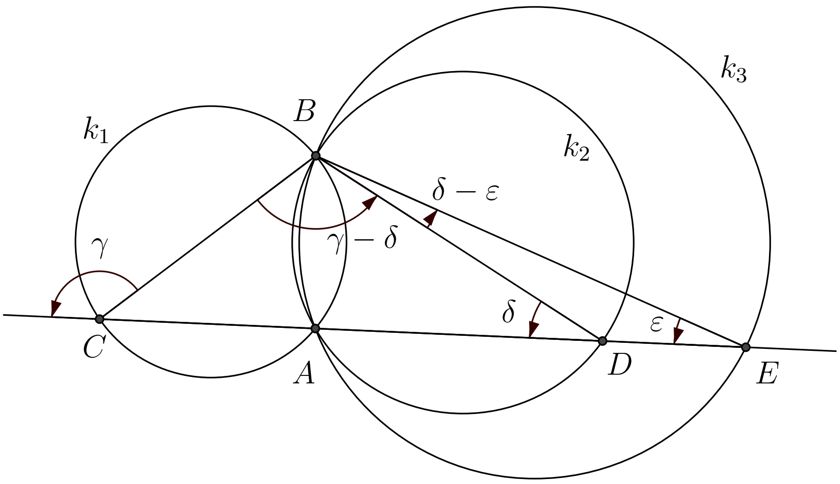
Da für jeden Winkel α die Gleichung $|\sin\alpha| = |\sin(\alpha + 180°)|$ gilt, dürfen wir die Funktion $\alpha \longmapsto |\sin\alpha|$ auch dann benutzen, wenn wir, wie im Folgenden beabsichtigt, mit orientierten Winkeln modulo 180° arbeiten.

Wir schreiben also im Folgenden $\alpha \equiv \beta$ genau dann, wenn $\alpha - \beta$ ein ganzzahliges Vielfaches von 180° ist.

Nach dem Peripheriewinkelsatz gibt es nun drei lediglich von $|AB|$ und der Größe der drei Kreise, nicht jedoch von der Position der Sekante durch C, D und E abhängige Winkel γ, δ und ε mit

$$\gamma \equiv |\sphericalangle BCA|, \quad \delta \equiv |\sphericalangle BDA| \quad \text{und} \quad \varepsilon \equiv |\sphericalangle BEA|, \tag{1}$$

vgl. Abbildung L 561232 e. (Man beachte, dass in der Konfiguration der Abbildung der orientierte Winkel BCA außerhalb des Dreiecks CAB liegt und sich aufgrund unserer Vereinbarung, modulo 180° zu arbeiten, auf dessen in der Abbildung gezeigten Außenwinkel reduziert.)



L 561232 e

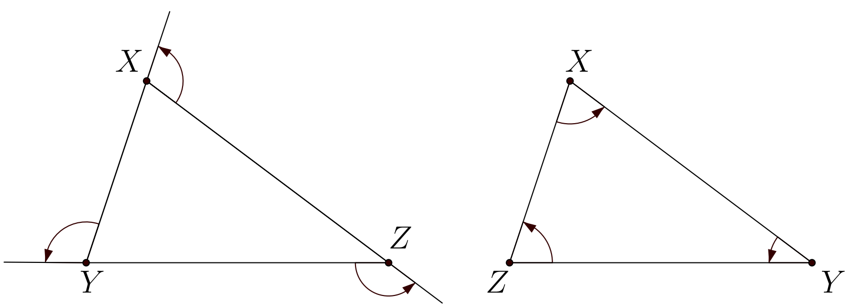
Da wir ja mit orientierten Winkeln modulo 180° arbeiten, folgt aus dem Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck, dass für je drei Punkte X, Y und Z die Beziehung

$$|\sphericalangle XYZ| + |\sphericalangle YZX| + |\sphericalangle ZXY| \equiv 0°$$

und folglich auch

$$|\sphericalangle YXZ| \equiv |\sphericalangle XYZ| - |\sphericalangle XZY|$$

gilt (siehe Abbildung L 561232 f).



L 561232 f

Speziell für $X = B$, $Y = C$ und $Z = D$ resultiert

$$|\sphericalangle CBD| \equiv \gamma - \delta\,, \tag{2}$$

und völlig analog stellt man

$$|\sphericalangle DBE| \equiv \delta - \varepsilon \tag{3}$$

fest. Mit Hilfe des Sinussatzes, angewandt auf die Dreiecke BCD und BDE, erhält man wegen (1), (2) und (3) sofort

$$\frac{|CD|}{|DE|} = \frac{|CD|}{|BD|} \cdot \frac{|BD|}{|DE|} = \frac{\sin|\gamma - \delta|}{\sin|\gamma|} \cdot \frac{\sin|\varepsilon|}{\sin|\delta - \varepsilon|}\,.$$

Da der zuletzt stehende Ausdruck nicht von der Wahl der Sekanten durch C, D und E abhängt, ist damit die Aufgabe gelöst.

561233 Lösung *7 Punkte*

Man stellt zunächst fest, dass jede Primzahl $p < 41$ eine solche Darstellung erlaubt. Die folgende Tabelle gibt hierfür jeweils ein Beispiel an.

p	$\left\|2^a - 3^b\right\|$	p	$\left\|2^a - 3^b\right\|$	p	$\left\|2^a - 3^b\right\|$	p	$\left\|2^a - 3^b\right\|$
2	$3^1 - 2^0$	7	$2^3 - 3^0$	17	$3^4 - 2^6$	29	$2^5 - 3^1$
3	$2^2 - 3^0$	11	$3^3 - 2^4$	19	$3^3 - 2^3$	31	$2^5 - 3^0$
5	$3^2 - 2^2$	13	$2^4 - 3^1$	23	$3^3 - 2^2$	37	$2^6 - 3^3$

Wir zeigen nun, dass 41 keine derartige Darstellung besitzt. Dazu gehen wir indirekt vor und nehmen an,

$$41 = \left|2^a - 3^b\right|$$

wäre eine solche Darstellung. Da 42 keine Zweierpotenz ist, gilt sicher $b \neq 0$. Ebenso sind auch 42, 43 und 45 jeweils keine Dreierpotenzen, weshalb $a \neq 0, 1, 2$ gelten muss. Somit ist $a \geq 3$ und $b \geq 1$.

Wir betrachten nun die Reste von $\left|2^a - 3^b\right|$ bei Division durch 8 und 3. Wegen $a \geq 3$ gilt $2^a \equiv 0 \bmod 8$. Die Gleichung $2^a - 3^b = \pm 41$ impliziert damit unmittelbar

$$3^b \equiv \mp 1 \bmod 8\,.$$

Dreierpotenzen mit geradem Exponenten lassen nun bei Division durch 8 immer den Rest 1 und solche mit ungeradem Exponenten den Rest 3. Folglich muss $3^b \equiv 1 \bmod 8$ sein, und es gilt $2^a - 3^b = -41$ mit einer geraden Zahl b.

Diese Gleichung impliziert nun wegen $b \geq 1$ und $3^b \equiv 0 \bmod 3$ ihrerseits $2^a \equiv -41 \bmod 3$, also

$$2^a \equiv 1 \bmod 3\,.$$

Da Zweierpotenzen mit geradem Exponenten bei Division durch 3 immer den Rest 1 lassen und solche mit ungeradem Exponenten den Rest 2, muss a ebenfalls eine gerade Zahl sein.

Existiert also eine Darstellung der in der Aufgabenstellung verlangten Art für 41, so muss sie von der Form

$$41 = 3^{2d} - 2^{2c} = \left(3^d - 2^c\right)\left(3^d + 2^c\right)$$

mit positiven ganzen Zahlen c und d sein. Da 41 eine Primzahl ist, ist dabei notwendigerweise der erste Faktor gleich 1 und der zweite gleich 41. Hieraus folgt aber sofort

$$2 \cdot 3^d = (3^d - 2^c) + (3^d + 2^c) = 1 + 41 = 42$$

und damit ein Widerspruch zu der Tatsache, dass 21 keine Dreierpotenz ist.

Damit ist bewiesen, dass 41 die kleinste Primzahl ist, die sich nicht in der Form $\left|2^a - 3^b\right|$ mit nichtnegativen ganzen Zahlen a und b darstellen lässt.

Bemerkung: 1. Die Darstellbarkeit der ersten zwölf Primzahlen in der Form $\left|2^a - 3^b\right|$ täuscht. Ein Computerexperiment zeigt, dass mit $a, b \leq 10000$ nur die folgenden Darstellungen von Primzahlen kleiner 1000 möglich sind. Es fällt dabei vor allem auf, dass in Wirklichkeit keine Exponenten größer als 11 auftreten.

p	$\left\|2^a - 3^b\right\|$	p	$\left\|2^a - 3^b\right\|$	p	$\left\|2^a - 3^b\right\|$
2	$3^1 - 2^0$	37	$2^6 - 3^3$	229	$2^8 - 3^3$
3	$2^2 - 3^0$	47	$2^7 - 3^4$	239	$3^5 - 2^2$
5	$2^3 - 3^1 = 3^2 - 2^2 = 2^5 - 3^3$	61	$2^6 - 3^1$	241	$3^5 - 2^1$
7	$2^3 - 3^0 = 3^2 - 2^1 = 2^4 - 3^2$	73	$3^4 - 2^3$	269	$2^9 - 3^5$
11	$3^3 - 2^4$	79	$3^4 - 2^1$	431	$2^9 - 3^4$
13	$2^4 - 3^1 = 2^8 - 3^5$	101	$2^7 - 3^3$	503	$2^9 - 3^2$
17	$3^4 - 2^6$	127	$2^7 - 3^0$	509	$2^9 - 3^1$
19	$3^3 - 2^3$	139	$3^7 - 2^{11}$	601	$3^6 - 2^7$
23	$3^3 - 2^2 = 2^5 - 3^2$	179	$3^5 - 2^6$	727	$3^6 - 2^1$
29	$2^5 - 3^1$	211	$3^5 - 2^5$	997	$2^{10} - 3^3$
31	$2^5 - 3^0$	227	$3^5 - 2^4$		

2. Die Argumentation modulo 3 und 8 wie in der Lösung funktioniert prinzipiell für alle Zahlen, die bei Division durch 24 den Rest 7 oder 17 lassen.

Nichtsdestotrotz erlauben die Zahlen 7, 17, 31, 79, 127 und 727 Darstellungen der Form $\left|2^a - 3^b\right|$, davon 7 sogar drei verschiedene. Möglich wird dies in drei Fällen durch $a = 1$, in weiteren dreien durch $b = 0$ sowie durch die trivialen Faktorisierungen

$$17 = (3^2 - 2^3)(3^2 + 2^3) = 1 \cdot 17 \qquad \text{und}$$
$$7 = (2^2 - 3^1)(2^2 + 3^1) = 1 \cdot 7\,,$$

wobei dann auch notwendigerweise $17 + 1$ das Doppelte einer Dreierpotenz und $7 + 1$ (das Doppelte) eine(r) Zweierpotenz ist. Die Begründung dafür, dass auf der anderen Seite $161 = 2 \cdot 3^4 - 1$ und $127 = 2 \cdot 2^6 - 1$ keine trivialen Faktorisierungen haben, erfordert nur minimal mehr Aufwand als oben.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 561231 — *Insgesamt: 6 Punkte*

Erste Umformungen bis zur Fallunterscheidung .... 1 Punkt
Untersuchung der Fälle bis zur Angabe der drei Lösungskandidaten .... 4 Punkte
Kenntlichmachung der Äquivalenz der Umformungen (falls zutreffend) oder andernfalls Probe .... 1 Punkt

Aufgabe 561232 — *Insgesamt: 7 Punkte*

Idee, Unabhängigkeit durch Gleichheit bei 2 Sekanten zu zeigen .... 1 Punkt
Beobachtung und Beweis der Winkelgleichheiten und Ähnlichkeiten .... 4 Punkte

Bei einem Vorgehen im Sinne der 1. Lösung können diese Punkte sinnvoll als 1 Punkt für die korrekte Fallunterscheidung und je 1 Punkt für jeden der drei Fälle gegliedert werden. Wenn also ohne Beachtung der Lagemöglichkeiten nur ein Fall behandelt wird, wäre in diesem Schritt nur 1 Punkt zu vergeben.

Zusammenführung zur Behauptung .... 2 Punkte

Aufgabe 561233 — *Insgesamt: 7 Punkte*

Angabe von Gegenbeispielen für $p < 41$ .... 2 Punkte
Nachweis der Eigenschaft für $p = 41$ .... 5 Punkte

Davon bei einem Vorgehen entsprechend der Beispiellösung

- Einschränkung der Größen von a und b .... 1 Punkt
- Einschränkung durch Betrachtung von Resten .... 2 Punkte
- Faktorzerlegung von $3^{2d} - 2^{2c}$ und Herbeiführung eines Widerspruchs .... 2 Punkte