56. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Lösungen – 2. Tag

561234 Lösung *6 Punkte*

Die gesuchte Zahl ist 162 000.

Beweis: Zunächst sei n eine beliebige positive ganze Zahl und

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s} \tag{1}$$

ihre Zerlegung in Primfaktoren. Dies bedeutet, dass $p_1, p_2, \dots, p_k$ paarweise verschiedene Primzahlen sind und $k_1, k_2, \dots, k_s$ positive ganze Zahlen.

Dann ist die Anzahl der Teiler von n gleich

$$d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_s + 1)\,, \tag{2}$$

denn jeder Teiler von n lässt sich wegen (1) und der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung auf genau eine Art in der Form

$$t = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_s^{x_s}$$

darstellen, wobei

$$\begin{aligned} x_1 &\in \{0, 1, 2, \dots, k_1\}\,,\\ x_2 &\in \{0, 1, 2, \dots, k_2\}\,,\\ &\vdots\\ x_s &\in \{0, 1, 2, \dots, k_s\} \end{aligned}$$

gelten. Es gibt also $k_1 + 1$ Möglichkeiten, den Exponenten x_1 zu wählen, $k_2 + 1$ Möglichkeiten für x_2 usw. Da diese unabhängig voneinander kombinierbar sind, folgt Formel (2).

Die offenbar durch 100 teilbare Zahl $162\,000 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^3$ besitzt also tatsächlich genau $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ Teiler. Im Folgenden bezeichne n die kleinste durch 100 teilbare Zahl mit genau 100 Teilern. Wir nehmen an, es wäre $n < 162\,000$. Wir werden dies auf einen Widerspruch führen und damit die Lösung der Aufgabe abschließen.

Da n genau 100 Teiler hat, folgt aus (2) sofort

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_s + 1)\,. \tag{3}$$

Außerdem dürfen wir, da n durch 100 teilbar ist, $p_1 = 2$ und $p_2 = 5$ annehmen, was sofort zu $k_1, k_2 \geq 2$ führt. Nach (3) sind weiterhin $k_1 + 1$ und $k_2 + 1$ Teiler von 100, weshalb sogar $k_1, k_2 \geq 3$ gelten muss. Wegen der Minimalität von n muss ferner $k_1 \geq k_2$ sein, denn im Falle $k_1 < k_2$ wäre die Zahl

$$n' = 2^{k_2} 5^{k_1} \dots p_s^{k_s}$$

ein kleineres Beispiel als n. Zusammenfassend haben wir also

$$k_1 \geq k_2 \geq 3\,. \tag{4}$$

Da die Zahl 100 nur die Teiler 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 und 100 hat, folgt aus (3) und (4), dass $k_1 \in \{3, 4, 9, 19, 24, 49, 99\}$ sein muss. Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

Fall 1: $k_1 = 3$

Nach (4) muss in diesem Fall auch $k_2 = 3$ gelten. Formel (3) zeigt dann, dass 100 durch $4 \cdot 4 = 16$ teilbar sein muss, was aber nicht stimmt.

Fall 2: $k_1 = 4$

Aus (4) erhalten wir $k_2 \in \{3, 4\}$, was zu einer weiteren Fallunterscheidung Anlass gibt.

Fall 2.1: $k_2 = 3$

Dann folgt aus (3) die Gleichung $(k_3 + 1) \cdots (k_s + 1) = 5$, also $s = 3$ und $k_3 = 4$, und damit wiederum $n = 2^4 \cdot 5^3 \cdot p_3^4 \geq 2^4 \cdot 5^3 \cdot 3^4 = 162\,000$ im Widerspruch zur Wahl von n.

Fall 2.2: $k_2 = 4$

In gleicher Weise erhalten wir $(k_3 + 1) \cdots (k_s + 1) = 4$ und damit $s = 3$ und $k_3 = 3$ oder $s = 4$ und $k_3 = k_4 = 1$. In der einen Variante gilt $p_3^{s_3} \geq 3^3 = 27$ und in der anderen $p_3^{s_3} \cdot p_4^{s_4} \geq 3 \cdot 7 = 21$. Es ergibt sich also jeweils $n > 2^4 \cdot 5^4 \cdot 20 = 200\,000$, was unserer Annahme über n widerspricht.

Fall 3: $k_1 = 9$

Nach (3) ist $k_2 + 1$ dann ein Teiler von 10, was zusammen mit (4) unmittelbar $k_2 \geq 4$ liefert. Also gilt $n \geq 2^{k_1} \cdot 5^{k_2} \geq 2^9 \cdot 5^4 = 2^5 \cdot 10^4 = 320\,000$, was $n < 162\,000$ widerspricht.

Fall 4: $k_1 \geq 19$

Dann ist $n \geq 2^{k_1} \cdot 5^{k_2} \geq 2^{19} \cdot 5^3 = 2^{16} \cdot 10^3 > 64 \cdot 10^6$ im Widerspruch zu $n < 162\,000$.

Damit ist also in jedem Falle ein Widerspruch eingetreten. Die Behauptung ist somit gezeigt und 162 000 ist die gesuchte Zahl.

561235 Lösung *7 Punkte*

Ergänzend zu den Bezeichnungen der Aufgabe bezeichnen wir mit c die Hypotenuse des betrachteten rechtwinkligen Dreiecks. Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$s_a^2 = \frac{a^2}{4} + b^2 , \quad s_b^2 = \frac{b^2}{4} + a^2$$

und daher

$$s_a^2 + s_b^2 = \frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{4}b^2 = \frac{5}{4}c^2 .$$

Bekanntlich sind die Abschnitte der von einem Punkt außerhalb eines Kreises an diesen Kreis gelegten Tangenten bis zu den jeweiligen Berührungspunkten gleich lang. Für den Inkreis eines Dreiecks bedeutet dies, dass von jeder Ecke aus die Abschnitte auf beiden angrenzenden Seiten bis zu den jeweiligen Inkreisberührungspunkten gleich lang sind. Bezeichnet man die Länge dieser Abschnitte für die den Seiten a, b und c gegenüberliegenden Eckpunkte mit l_a, l_b bzw. l_c, so gilt $2l_a + 2l_b + 2l_c = a + b + c$ und $l_a + l_b = c$, daher $2l_c = a + b - c$.

Aufgrund der Rechtwinkligkeit des hier betrachteten Dreiecks sind der c gegenüberliegende Eckpunkt, der Inkreismittelpunkt und die Inkreisberührungspunkte auf den Katheten Eckpunkte eines Quadrates. Damit ist $r = l_c = (a + b - c)/2$. Also gilt

$$\frac{r^2}{s_a^2 + s_b^2} = \frac{4r^2}{5c^2} = \frac{(a + b - c)^2}{5c^2} .$$

Da $(a-b)^2 \geq 0$ für alle reellen Zahlen a, b ist, gilt für die Katheten a, b und die Hypotenuse c jedes rechtwinkligen Dreiecks

$$c^2 = a^2 + b^2 \geq 2ab\,, \quad 2c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2\ ,$$

also $a + b \leq c\sqrt{2}$. Damit und mit der Dreiecksungleichung folgt

$$0 \leq \frac{a+b-c}{c} \leq \frac{c\sqrt{2}-c}{c} = \sqrt{2}-1\,, \quad \text{also} \quad \frac{(a+b-c)^2}{5c^2} \leq \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{5} = \frac{3-2\sqrt{2}}{5}\,.$$

Somit ist die Behauptung bewiesen.

561236 Lösung *7 Punkte*

Erste Lösung: Angenommen, das Paar (x, y) ist eine Lösung des Gleichungssystems. Dann gilt

$$0 < x \leq 1 \qquad \text{und} \qquad 0 < y \leq 1\,, \tag{1}$$

denn einerseits sind die Terme unter den Wurzeln genau für $-1 \leq x \leq 1$ bzw. $-1 \leq y \leq 1$ nichtnegativ, und andererseits sind die beiden rechten Seiten der Gleichungen positive Zahlen, was $x > 0$ und $y > 0$ erfordert.

Quadrieren liefert nun

$$x^2(1-y^2) = \frac{1}{8}(2+\sqrt{3})\,, \tag{2}$$

$$y^2(1-x^2) = \frac{1}{8}(2-\sqrt{3})\,, \tag{3}$$

und Subtraktion der Gleichung (3) von Gleichung (2) zeigt

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,, \qquad \text{also}$$

$$y^2 = x^2 - \frac{1}{4}\sqrt{3}\,. \tag{4}$$

Setzt man dies in (2) ein, so entsteht wegen $1 - y^2 = \frac{1}{4}(4+\sqrt{3}) - x^2$ und

$$x^2(1-y^2) = \frac{1}{4}(4+\sqrt{3})x^2 - x^4$$

die in x biquadratische Gleichung

$$x^4 - \frac{1}{4}(4+\sqrt{3})x^2 + \frac{1}{8}(2+\sqrt{3}) = 0$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{8}(4+\sqrt{3}) \pm \sqrt{\frac{1}{64}(19+8\sqrt{3}) - \frac{1}{8}(2+\sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{8}(4+\sqrt{3}) \pm \frac{1}{8}\sqrt{19+8\sqrt{3}-(16+8\sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{8}(4+\sqrt{3}) \pm \frac{1}{8}\sqrt{3}\,, \end{aligned}$$

also

$$x^2 = \frac{1}{4}(2+\sqrt{3}) \qquad \text{oder} \qquad x^2 = \frac{1}{2}\,.$$

Wegen (1) ergeben sich hieraus die beiden Möglichkeiten

$$x_1 = +\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} \qquad \text{und} \qquad x_2 = +\frac{1}{2}\sqrt{2}\,.$$

Für die zugehörigen y-Werte erhält man durch Einsetzen in (4)

$$y_1 = +\frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad y_2 = +\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\,,$$

da die negativen Werte wiederum wegen (1) entfallen.

Probe: Tatsächlich ist das Paar

$$(x,y) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

eine Lösung, da

$$\begin{aligned}
x\sqrt{1-y^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \frac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+1) \qquad \text{und}\\
y\sqrt{1-x^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \frac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)
\end{aligned}$$

gelten.

Auch das Paar

$$(x,y) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$$

ist eine Lösung, denn es gelten

$$\begin{aligned}
x\sqrt{1-y^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}(2-\sqrt{3})} = \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \frac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+1) \qquad \text{und}\\
y\sqrt{1-x^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \frac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)\,.
\end{aligned}$$

Ergebnis: Das gegebene Gleichungssystem hat genau die Lösungen

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\,.$$

Zweite Lösung: Angenommen, das Paar (x,y) ist eine Lösung des Gleichungssystems. Wie in der 1. Lösung zeigt man zunächst $0 < x \leq 1$ und $0 < y \leq 1$. Folglich existieren eindeutig bestimmte Winkel φ und ψ aus dem Intervall $(0,\pi/2]$ mit

$$x = \sin\varphi\,, \qquad y = \sin\psi\,.$$

Mit dieser Substitution ergeben sich

$$\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \cos\psi \qquad \text{und} \qquad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \cos\varphi\,,$$

weshalb das gegebene Gleichungssystem übergeht in

$$\sin\varphi\cdot\cos\psi = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+1)\,, \tag{5}$$

$$\sin\psi\cdot\cos\varphi = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)\,. \tag{6}$$

Addition beider Gleichungen führt zusammen mit dem Additionstheorem für den Sinus auf

$$\sin(\varphi+\psi) = \sin\varphi\cdot\cos\psi + \cos\varphi\cdot\sin\psi = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,,$$

während Subtraktion der Gleichung (6) von Gleichung (5)

$$\sin(\varphi-\psi) = \sin\varphi\cdot\cos\psi - \cos\varphi\cdot\sin\psi = \frac{1}{2}$$

ergibt. Das gegebene Gleichungssystem ist also äquivalent zu

$$\sin(\varphi+\psi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,, \tag{7}$$

$$\sin(\varphi-\psi) = \frac{1}{2}\,. \tag{8}$$

Dies ist wegen $0 < \varphi+\psi < \pi$ und $-\pi/2 < \varphi-\psi < \pi/2$ äquivalent dazu, dass

$$\varphi+\psi = \frac{\pi}{3} \qquad \text{oder} \qquad \varphi+\psi = \frac{2\pi}{3}$$

sowie

$$\varphi-\psi = \frac{\pi}{6}$$

gelten. Dies ist weiter äquivalent dazu, dass φ und ψ entweder die Werte

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} \qquad \text{und} \qquad \psi_1 = \frac{\pi}{12}$$

oder die Werte

$$\varphi_2 = \frac{5}{12}\pi \qquad \text{und} \qquad \psi_2 = \frac{\pi}{4}$$

haben müssen.

Ergebnis: Das gegebene Gleichungssystem hat genau die Lösungen

$$\left(\sin\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{12}\right) = (\sin 45°, \sin 15°) \qquad \text{und} \qquad \left(\sin\tfrac{5}{12}\pi, \sin\tfrac{\pi}{4}\right) = (\sin 75°, \sin 45°)\,.$$

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 561234	*Insgesamt: 6 Punkte*
Ansatz über die Primfaktorzerlegung	1 Punkt
Formel für die Teileranzahl	1 Punkt
Systematische Fallunterscheidung	3 Punkte
Richtiges Ergebnis	1 Punkt

Aufgabe 561235	*Insgesamt: 7 Punkte*
Rückführung der Seitenhalbierenden auf gemeinsame Bezugsgrößen (in der Beispiellösung Dreiecksseiten), z. B. mittels Pythagoras	2 Punkte
Rückführung des Inkreisradius auf dieselben Größen	2 Punkte
Ansatz über eine geeignete geometrische Ungleichung wie $2c^2 \geq (a+b)^2$ und Umformung bis zur Behauptung	3 Punkte

Aufgabe 561236	*Insgesamt: 7 Punkte*
Nachweis, dass nur die beiden Paare das System lösen können, in algebraischer oder trigonometrischer Darstellung	5 Punkte
Probe für beide Lösungen oder stringente Argumentation über Äquivalenzumformungen (d. h. bei Probe je 1 Punkt für jede der beiden Lösungen)	2 Punkte