56. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 8
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

560844

Zur Siegerehrung einer Bundesrunde der Mathematik-Olympiade steht den 14 Schülern der Mannschaft eines Bundeslandes auch die Reihe 23 mit 10 Sitzplätzen zur Verfügung.

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat die Mannschaft, die 10 Plätze zu besetzen?

b) In dieser Mannschaft gibt es 6 Preisträger. Sie sollen in der Reihe 23 an den beiden Rändern sitzen, auf jeder Seite drei.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat die Mannschaft jetzt, die 10 Plätze zu besetzen?

c) Die Preisträger heißen Anne, Ben, Charlotte, Dennis, Eva, Finn. Anne und Charlotte wollen nebeneinander sitzen, während Ben und Dennis nicht nebeneinander sitzen wollen.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat die Mannschaft, unter diesen Zusatzbedingungen sowie den Bedingungen aus Teilaufgabe b) die 10 Plätze zu besetzen.

Hinweis: Die Produkte müssen nicht ausgerechnet werden.

560845

Ermittle alle nichtnegativen ganzen Zahlen n, welche die folgende Bedingung erfüllen:

Zu n gibt es eine positive ganze Zahl p derart, dass $(n+p)^2 - 3 \cdot p$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist.

560846

Gegeben sind ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r sowie ein Punkt P. Für den Abstand $|PM|$ des Punktes P zum Kreismittelpunkt M gilt $r < |PM| < 3r$.

Durch den Punkt P soll eine Gerade g mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, welche den Kreis k in zwei Punkten Q und R derart schneidet, dass $|PQ| = |QR|$ gilt.

a) Beschreibe eine mögliche Konstruktion mit Zirkel und Lineal einer solchen Geraden g.

b) Weise nach, dass diese Konstruktion stets durchführbar ist und die nach deiner Beschreibung konstruierte Gerade g tatsächlich die geforderten Eigenschaften hat.