56. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 12
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

561244

Gegeben sei ein Sehnenviereck $ABCD$. Der Punkt P liege so auf der Geraden AB, dass der Kreis durch C, D und P die Gerade AB berührt. Entsprechend liege Q so auf der Geraden CD, dass der Kreis durch A, B und Q die Gerade CD berührt.

Man beweise, dass der Punkt P von der Geraden CD denselben Abstand hat wie der Punkt Q von der Geraden AB.

561245

Man beweise, dass für alle nicht negativen Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 1$

$$1 \leq \frac{x}{1 - yz} + \frac{y}{1 - zx} + \frac{z}{1 - xy} \leq \frac{9}{8}$$

gilt.

561246

Man zeige, dass unendlich viele positive ganze Zahlen m existieren, für die es m aufeinanderfolgende Quadratzahlen gibt, deren Summe gleich m^3 ist, und gebe eine Lösung mit $m > 1$ an.