56. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 8
Lösungen – 1. Tag

560841 Lösung *6 Punkte*

I. Es sei n eine natürliche Zahl mit den Eigenschaften (1), (2) und (3). Nach (3) ist n durch 72 teilbar. Wegen $72 = 8 \cdot 9$ ist n auch durch 8 teilbar. Nach der Teilbarkeitsregel für die 8 muss die aus den letzten drei Ziffern von n gebildete Zahl durch 8 teilbar sein. Wegen (1) kommen als mögliche Zahlen nur 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221 und 222 in Frage, von denen nur 112 durch 8 teilbar ist. Daher folgt:

Die Zahl n endet auf 112. (4)

Wegen (2) und da 112 die Quersumme 4 hat, gilt:

Die Summe der restlichen Ziffern von n ist 68. (5)

Folglich gilt: Wenn eine natürliche Zahl n die Eigenschaften (1), (2) und (3) besitzt, dann besitzt sie auch die Eigenschaften (4) und (5).

II. Es sei nun n eine natürliche Zahl mit den Eigenschaften (1), (4) und (5). Nach (4) und (5) ist die Quersumme von n $(68 + 1 + 1 + 2 =)$ 72, weswegen n auch die Eigenschaft (2) besitzt. Da die Quersumme von n durch 9 teilbar ist, ist n nach der Teilbarkeitsregel für die 9 auch durch 9 teilbar. Nach (4) und der Teilbarkeitsregel für die 8 ist n auch durch 8 teilbar. Da 8 und 9 teilerfremd sind, ist n durch $(8 \cdot 9 =)$ 72 teilbar, besitzt also die Eigenschaft (3).

Aus I. und II. folgt, dass eine natürliche Zahl n genau dann die Eigenschaften (1), (2) und (3) besitzt, wenn sie die Eigenschaften (1), (4) und (5) besitzt. Daher sind die größte und die kleinste natürliche Zahl n mit den Eigenschaften (1), (4) und (5) zu finden.

Um die größte natürliche Zahl n mit den Eigenschaften (1), (4) und (5) zu erhalten, muss n im dekadischen Positionssystem möglichst viele Stellen haben, also die nach (5) gebildete Summe 68 aus möglichst vielen Summanden bestehen. Das ist unter Beachtung von (1) der Fall, wenn jeder Summand von 68 eine 1 ist. Damit folgt:

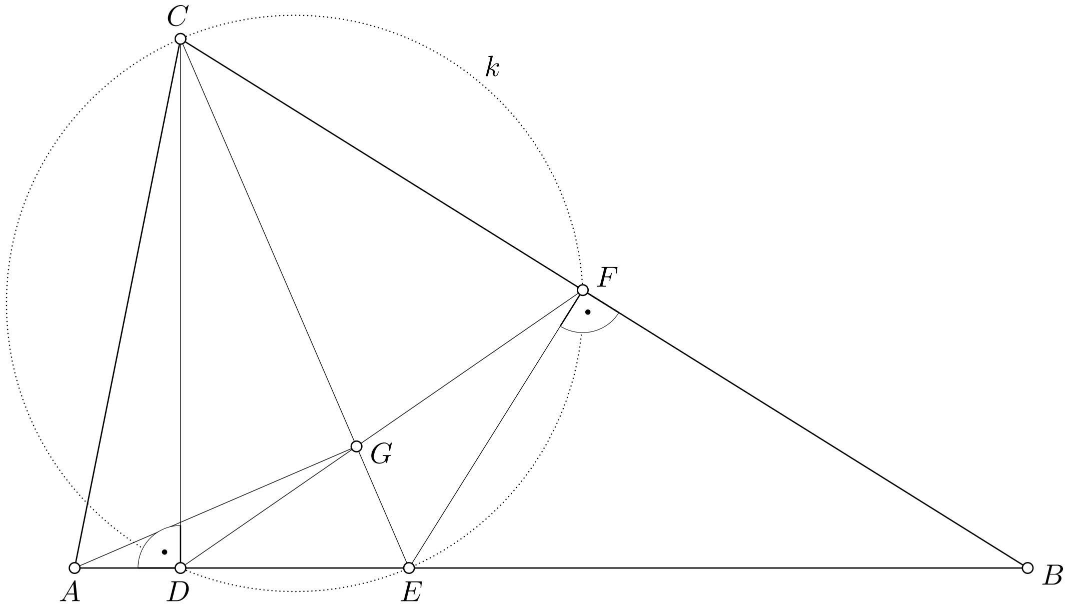
Die größte Zahl mit den geforderten Eigenschaften ist $\underbrace{1\ldots1}_{68\,\text{Einsen}}112$.

Um die kleinste natürliche Zahl n mit den Eigenschaften (1), (4) und (5) zu erhalten, muss n im dekadischen Positionssystem möglichst wenige Stellen haben, also die nach (5) gebildete Summe 68 aus möglichst wenigen Summanden bestehen. Das ist unter Beachtung von (1) der Fall, wenn jeder Summand von 68 eine 2 ist. Damit folgt:

Die kleinste Zahl mit den geforderten Eigenschaften ist $\underbrace{2\ldots2}_{34\,\text{Zweien}}112$.

560842 Lösung *7 Punkte*

Da das Dreieck ABC spitzwinklig ist, liegt wegen der Bedingung (2) der Punkt D im Innern der Seite $\overline{AB}$. Aufgrund der Bedingungen (1) und (3) liegt der Punkt E im Innern der Strecke $\overline{BD}$. Da wegen der Spitzwinkligkeit des Dreiecks ABC auch im Dreieck BCE die Winkel $\sphericalangle CBE$ und $\sphericalangle ECB$ spitz sind, liegt wegen der Bedingung (4) der Punkt F im Innern der Seite $\overline{BC}$. Folglich liegt wegen der Bedingung (5) der Punkt G im Innern der Strecke $\overline{CE}$, siehe Abbildung L 560842.



L 560842

Es sei $\gamma = |\sphericalangle ACB|$. Wegen der Bedingungen (2) und (4) liegen die Punkte D und F nach einer Umkehrung des Satzes des Thales auf dem Kreis k über dem Durchmesser $\overline{CE}$. Damit sind die Peripheriewinkel $\sphericalangle ECF$ und $\sphericalangle EDF$ über dem (orientierten) Bogen $\widehat{EF}$ des Kreises k gleich groß, woraus mit der Bedingung (3)

$$|\sphericalangle EDF| = \frac{\gamma}{2} \tag{6}$$

folgt.

Aus der Bedingung (3) und der Gleichung (6) folgt

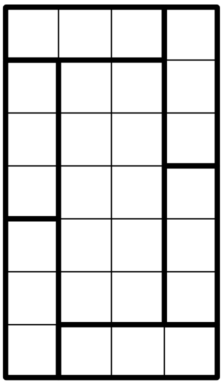
$$|\sphericalangle ACG| + |\sphericalangle GDA| = |\sphericalangle ACE| + (180° - |\sphericalangle EDF|) = \frac{\gamma}{2} + \left(180° - \tfrac{\gamma}{2}\right) = 180°\,.$$

Nach der Umkehrung des Sehnenvierecksatzes liegen die Punkte A, D, G und C daher auf einem Kreis.

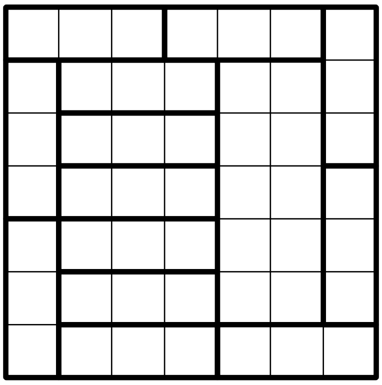
560843 Lösung *7 Punkte*

Teil a) Die in den Abbildungen L 560843 a und L 560843 b dargestellten Auslegungen zeigen, dass ein 7×4-Rechteck und ein 7×7-Rechteck tatsächlich mit 3×1- und 5×2-Rechtecken ausgelegt werden kann.

Teil b) Wir untersuchen zunächst, welche $m\times 1$-Rechtecke ausgelegt werden können. Diese können höchstens mit 3×1-Rechtecken ausgelegt werden, die sich an der kurzen Seite berühren. Damit muss aber $m = 3k$ für positive ganze Zahlen k sein. Folglich gilt:



L 560843 a



L 560843 b

$(3k-2)\times 1$- und $(3k-1)\times 1$-Rechtecke sind nicht auslegbar, $3k\times 1$-Rechtecke sind auslegbar. (1)

Nur unter Verwendung von 3×1-Rechtecken gelingt es außerdem, alle diejenigen Rechtecke auszulegen, deren eine Seitenlänge ein Vielfaches von 3 ist. Hat nämlich das auszulegende Rechteck die Seitenlängen $a = 3k$ und b, so legen wir k der 3×1-Rechtecke jeweils mit der kürzeren Seite zu einem Streifen der Breite 1 aneinander und legen anschließend b solcher Streifen mit der langen Seite aneinander, womit das gegebene Rechteck ausgelegt ist. Folglich gilt:

Rechtecke, deren eine Seitenlänge ein Vielfaches von 3 ist, sind auslegbar. (2)

Unter Verwendung von 5×2-Rechtecken gelingt es, auch alle diejenigen Rechtecke auszulegen, deren eine Seitenlänge ein Vielfaches von 5 und deren andere Seite größer als 1 ist. Dazu betrachten wir auszulegende Rechtecke mit den Seitenlängen $a = 5k$ und b.

Wenn b eine gerade Zahl ist, also $b = 2c$ mit einer positiven ganzen Zahl c gilt, so legen wir zunächst k der 5×2-Rechtecke jeweils mit der kürzeren Seite zu einem Streifen der Breite 2 aneinander und legen anschließend c solcher Streifen mit der langen Seite aneinander, womit das gegebene Rechteck ausgelegt ist.

Wenn b eine ungerade Zahl ist, also $b = 2c + 1$ mit einer positiven ganzen Zahl c gilt, so legen wir zunächst $5k$ der 3×1-Rechtecke jeweils mit der längeren Seite zu einem Streifen der Breite 3 und legen anschließend $c - 1$ Streifen aus jeweils k der 5×2-Rechtecke der Breite 2 mit der langen Seite aneinander, womit das gegebene Rechteck ausgelegt ist. Folglich gilt:

Rechtecke, deren eine Seitenlänge ein Vielfaches von 5 und deren andere Seitenlänge größer als 1 ist, sind auslegbar. (3)

Aus (2) und (3) folgt, dass auch Rechtecke, deren eine Seitenlänge größer als 1 ist und deren andere Seite die Länge $3\cdot x + 5\cdot y$ für nichtnegative ganze Zahlen x und y hat, auslegbar sind. Wir können nämlich solche Rechtecke aus Streifen der Breite 3 und 5 auslegen.

Somit können Rechtecke mit einer Seitenlänge $(3\cdot 1 + 5\cdot 1 =)\ 8$, $(3\cdot 3 =)\ 9$ und $(5\cdot 2 =)$ 10 ausgelegt werden und damit wegen (2) auch alle Rechtecke mit einer Seitenlänge $8 + 3\cdot k$, $9 + 3\cdot k$ und $10 + 3\cdot k$ für nichtnegative ganze Zahlen k. Folglich gilt:

Alle Rechtecke, deren eine Seitenlänge größer als 7 und deren andere Seitenlänge größer als 1 ist, sind auslegbar. (4)

Unter Beachtung von (1), (2), (3) und (4) bleibt nur noch zu untersuchen, ob 7×7-, 7×4-, 7×2-, 4×4-, 4×2- oder 2×2-Rechtecke auslegbar sind.

Für 7×7- und 7×4-Rechtecke ist das möglich, wie in Teil a) gezeigt wurde.

Angenommen, ein 7×2-Rechteck ist mit x der 3×1- und y der 5×2-Rechtecke auslegbar. Dann gilt für die Maßzahlen der Flächeninhalte $3 \cdot x + 10 \cdot y = 14$. Für y kommen damit nur die Werte 0 oder 1 in Frage, was in beiden Fällen zum Widerspruch führt, da 3 kein Teiler von 14 bzw. von 4 ist. Folglich kann ein 7×2-Rechteck nicht ausgelegt werden.

In den verbleibenden Fällen können die Rechtecke nur höchstens mit 3×1-Rechtecken ausgelegt werden, da keine Seitenlänge größer als 4 ist. Die Maßzahlen der Flächeninhalte dieser Rechtecke sind 16, 8 und 4. Keine dieser Zahlen ist durch 3 teilbar, womit diese Rechtecke nicht ausgelegt werden können.

Zusammenfassend gilt: Nur 7×2-, 4×4-, 4×2-, 2×2-Rechtecke sowie $(3 \cdot k - 2)\times 1$- und $(3 \cdot k - 1)\times 1$-Rechtecke mit positiven ganzen Zahlen k können nicht durch 3×1- und 5×2-Puzzleteile ausgelegt werden.