56. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 8
Lösungen – 2. Tag

560844 Lösung *6 Punkte*

Teil a) Für die Lösungsdarstellung nummerieren wir die Plätze der Reihe 23:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Für den ersten Platz in der Reihe 23 gibt es genau 14 Möglichkeiten der Besetzung, für den zweiten Platz verbleiben dann noch genau 13 Möglichkeiten usw. Schließlich verbleiben für den 10. Platz noch genau 5 Möglichkeiten. Folglich gibt es insgesamt genau $14 \cdot 13 \cdot \cdots \cdot 5$ $(= 3\,632\,428\,800)$ Möglichkeiten, diese zehn Plätze zu besetzen.

Teil b) Für die sechs Preisträger gibt es auf den sechs Randplätzen nach den analogen Überlegungen wie in der Lösung im Teil a) genau $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ $(= 720)$ Sitzmöglichkeiten. Für die restlichen acht Schüler gibt es in der Reihe noch genau vier Plätze, wofür es wieder analog zur Lösung im Teil a) genau $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ Sitzmöglichkeiten gibt. Folglich gibt es jetzt insgesamt genau $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ $(= 1\,209\,600)$ Möglichkeiten, diese zehn Plätze zu besetzen.

Teil c) Die Plätze 1, 2 und 3 sowie 8, 9 und 10 bezeichnen wir jeweils als Dreiergruppe.

Anne und Charlotte können den Bedingungen der Aufgabe entsprechend nur auf den Plätzen 1 und 2, 2 und 3, 8 und 9 oder 9 und 10 platziert werden, wobei die Reihenfolge zu beachten ist. Es gibt daher genau $(4 \cdot 2 =)$ 8 Möglichkeiten zur Platzierung von Anne und Charlotte.

Ben und Dennis können nur in der gleichen Dreiergruppe oder in verschiedenen Dreiergruppen sitzen. Wenn sie in der gleichen Dreiergruppe sitzen, dann können sie nur in der Dreiergruppe sitzen, in der Anne und Charlotte nicht sitzen, und dort nur auf den äußeren Plätzen. Da dann nur noch ihre Reihenfolge zu beachten ist, gibt es hierfür genau 2 Möglichkeiten. Wenn Ben und Dennis in verschiedenen Dreiergruppen sitzen, dann muss einer den freien Platz der Dreiergruppe bei Anne und Charlotte und der andere einen der drei Plätze in der anderen Dreiergruppe besetzen. Da auch die Reihenfolge von Ben und Dennis zu beachten ist, gibt es $(1 \cdot 3 \cdot 2 =)$ 6 Möglichkeiten für diese Platzierung von Ben und Dennis. Insgesamt gibt es daher $(2 + 6 =)$ 8 Möglichkeiten zur Platzierung von Ben und Dennis.

Für die restlichen zwei Preisträger verbleiben zwei Plätze, also genau 2 Möglichkeiten, die restlichen zwei Plätze zu besetzen.

Die acht verbleibenden Schüler haben dann wieder wie in der Lösung zur Teilaufgabe b) genau $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ Möglichkeiten, die anderen vier Plätze zu besetzen.

Folglich gibt es unter den gegebenen Bedingungen insgesamt genau $8 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ $(= 215\,040)$ Möglichkeiten, die zehn Plätze zu besetzen.

560845 Lösung *7 Punkte*

Es gelte $n = 0$. Wir wählen $p = 3$. Wegen $(n + p)^2 - 3 \cdot p = (0 + 3)^2 - 3 \cdot 3 = 9 - 9 = 0$ und $0 = 0^2$ ist $(n+p)^2 - 3 \cdot p$ für dieses p tatsächlich das Quadrat einer ganzen Zahl. Die Bedingung ist daher für $n = 0$ erfüllt.

Es sei nun n eine positive ganze Zahl. Wir wählen $p = 2 \cdot n - 1$. Damit sind auch p und $3 \cdot n - 2$ positive ganze Zahlen. Wegen

$$\begin{aligned}(n + p)^2 - 3 \cdot p &= (n + 2 \cdot n - 1)^2 - 3 \cdot (2 \cdot n - 1) = (3 \cdot n - 1)^2 - 6 \cdot n + 3 \\ &= 9 \cdot n^2 - 6 \cdot n + 1 - 6 \cdot n + 3 = 9 \cdot n^2 - 12 \cdot n + 4 \\ &= (3 \cdot n - 2)^2\end{aligned}$$

ist $(n+p)^2 - 3 \cdot p$ daher für dieses p tatsächlich das Quadrat einer ganzen Zahl. Die Bedingung ist also auch für jede positive ganze Zahl n erfüllt.

Die Bedingung ist folglich für jede nichtnegative ganze Zahl n erfüllt.

Bemerkung: Eine Herleitung ist von der Aufgabenstellung nicht gefordert. Die nachfolgenden Herleitungen zeigen, wie man die Lösung erhalten kann.

1. Diese Herleitung gewinnt durch systematisches Probieren eine Vermutung, die dann bewiesen wird:

Es sei $n = 0$. Dann ist $(n + p)^2 - 3 \cdot p$ für $p = 3$ das Quadrat der ganzen Zahl 0.

Es sei $n = 1$. Dann ist $(n + p)^2 - 3 \cdot p$ für $p = 1$ das Quadrat der ganzen Zahl 1.

Es sei $n = 2$. Dann ist $(n + p)^2 - 3 \cdot p$ für $p = 3$ das Quadrat der ganzen Zahl 4.

Es sei $n = 3$. Dann ist $(n + p)^2 - 3 \cdot p$ für $p = 5$ das Quadrat der ganzen Zahl 7.

Hierdurch gelangen wir zu der Vermutung, dass für jede positive ganze Zahl n die Zahl $(n + p)^2 - 3 \cdot p$ das Quadrat der ganzen Zahl $3 \cdot n - 2$ ist, wenn $p = 2 \cdot n - 1$ gewählt wird. Der Beweis wird dann wie oben geführt.

2. Diese Herleitung beruht auf der Beobachtung, dass $(n + p)^2 - 3 \cdot p$ das Quadrat einer nichtnegativen ganzen Zahl kleiner als $n + p$ sein muss. Wir untersuchen daher, ob mit $a = n + p - 1$ die Gleichung $(n+p)^2 - 3 \cdot p = (n+p-1)^2$ gelten kann. Durch Ausmultiplizieren und weitere Termumformung erhalten wir die äquivalente Gleichung $p = 2 \cdot n - 1$. Für jede positive ganze Zahl n ist daher die Bedingung der Aufgabe erfüllt, da mit der positiven ganzen Zahl $p = 2 \cdot n - 1$ die Zahl $(n + p)^2 - 3 \cdot p$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist. Für $n = 0$ kann $p = 3$ gewählt werden, damit $(n + p)^2 - 3 \cdot p$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist.

3. Diese Herleitung nutzt die dritte binomische Formel, um die Differenz zweier Quadrate als Produkt zu schreiben: Die Gleichung $(n+p)^2 - 3 \cdot p = a^2$ ist äquivalent zu $(n+p)^2 - a^2 = 3 \cdot p$ und nach der dritten binomischen Formel auch zu $(n + p - a) \cdot (n + p + a) = 3 \cdot p$. Obwohl es nicht zwingend notwendig ist, kann man es mit den Ansätzen $n + p - a = 3$ und $n + p + a = p$ sowie $n + p - a = 1$ und $n + p + a = 3 \cdot p$ versuchen. Im ersten Fall erhält man durch Addition und Vereinfachung $2 \cdot n + p = 3$, was zu den Lösungen $n = 0$, $p = 3$ sowie $n = 1$, $p = 1$ führt. Im zweiten Fall erhält man $p = 2 \cdot n - 1$ und daraus dann $a = n + p - 1 = 3 \cdot n - 2$, was für alle $n \geq 1$ eine Lösung liefert, da dann p eine positive ganze Zahl ist.

560846 Lösung *7 Punkte*

Teil a) Konstruktionsbeschreibung.

(K1) Konstruiere die beiden Schnittpunkte des Kreises k_1 mit dem Mittelpunkt P und dem Radius r und des Kreises k_2 mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $2r$. Bezeichne einen der beiden Schnittpunkte mit S.

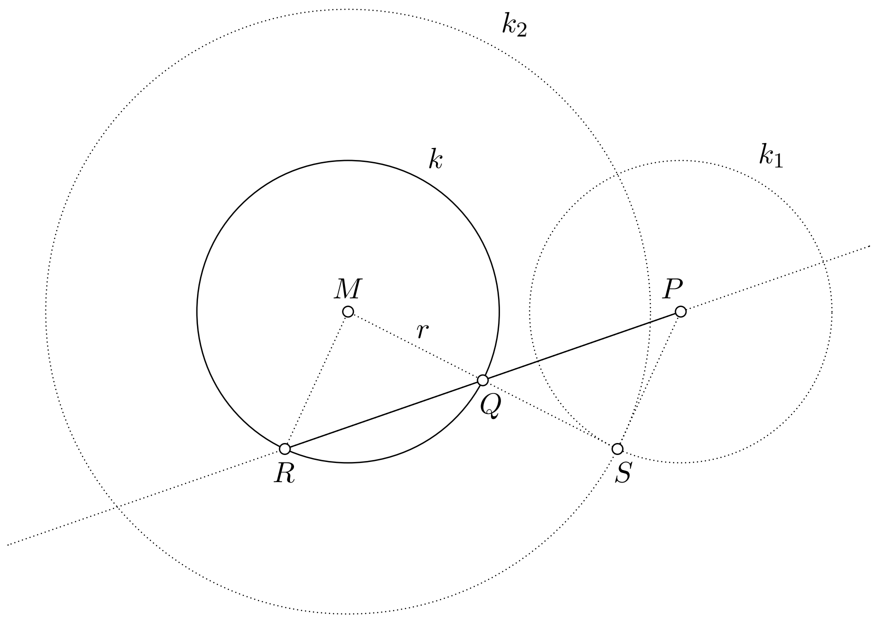
(K2) Konstruiere den Schnittpunkt der Strecke $\overline{MS}$ mit dem Kreis k und bezeichne ihn mit Q.

(K3) Konstruiere den vom Punkt Q verschiedenen Schnittpunkt der Geraden $g = PQ$ mit dem Kreis k und bezeichne ihn mit R.

Teil b) Determination und Konstruktionsbeweis.

Da der Kreis k_1 den Radius r und der Kreis k_2 den Radius $2r$ haben, schneiden sie sich genau dann in zwei verschiedenen Punkten, wenn $|MP| < r + 2r$ und $|MP| > 2r - r$ gelten. Der Konstruktionsschritt (K1) ist aufgrund der Bedingung $r < |MP| < 3r$ daher immer ausführbar.

Da der Punkt S auf dem Kreis k_1 mit Mittelpunkt P und dem Radius r liegt, gilt $|PS| = r$, siehe Abbildung L 560846. Da der Punkt S auf dem Kreis k_2 mit Mittelpunkt M und dem Radius $2r$ liegt, gilt $|MS| = 2r$.



L 560846

Der Konstruktionsschritt (K2) ist immer ausführbar, da der Punkt S wegen $|MS| = 2r > r$ außerhalb des Kreises k liegt. Damit gilt $|QS| = |MS| - |MQ| = 2r - r = r$. Folglich ist das Dreieck PQS gleichschenklig mit einem Basiswinkel SQP. Da Basiswinkel spitze Winkel sind, steht die Gerade PQ nicht senkrecht auf dem Berührungsradius $\overline{MQ}$ des Kreises k und schneidet folglich den Kreis k in einem von Q verschiedenen Punkt R. Der Konstruktionsschritt (K3) ist also auch immer ausführbar.

Die Punkte Q und R liegen auf dem Kreis k, weswegen $|MQ| = |MR| = r$ gilt. Das Dreieck MRQ ist somit ebenfalls gleichschenklig. Da die Winkel $\sphericalangle MQR$ und $\sphericalangle SQP$ zueinander Scheitelwinkel sind, haben die gleichschenkligen Dreiecke MRQ und PQS kongruente Basiswinkel, womit auch die dritten Winkel kongruent zueinander sind. Hieraus und aus der Streckenlängengleichheit $|PS| = |QS| = |MQ| = |MR| = r$ ergibt sich nach dem Kongruenzsatz (sws) die Kongruenz der Dreiecke MRQ und PQS, woraus schließlich $|PQ| = |QR|$ folgt.

Bemerkung: Zum Finden einer geeigneten Konstruktion können folgende Überlegungen hilfreich sein:

Die Punkte Q und R seien wie gefordert konstruiert. Dann ist der Punkt Q der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PR}$. Da sich die Diagonalen im Parallelogramm gegenseitig halbieren, ist der Punkt Q der Diagonalenschnittpunkt eines zu bestimmenden Parallelogramms $PMRX$. Da im Parallelogramm gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, muss $|PX| = |MR| = r$ gelten. Der Punkt X muss also auf dem Kreis mit Mittelpunkt P und Radius r liegen. Weiter ist der Punkt Q Mittelpunkt der Diagonale $\overline{MX}$, weswegen $|MX| = 2 \cdot |MQ| = 2 \cdot r$ gelten muss. Der Punkt X muss also auch auf dem Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $2 \cdot r$ liegen. Der Punkt X ist wegen $r < |PM| < 3 \cdot r$ konstruierbar. Den Punkt Q erhält man dann als Mittelpunkt der Strecke $\overline{MX}$.