56. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 9
Lösungen – 1. Tag

560941 Lösung *6 Punkte*

Wenn Tom auf den ersten 4 km für eine Zeit von a Stunden den Motor hinzuschaltet, dann fährt er für a Stunden 35 km/h und legt in dieser Zeit $35 \cdot a$ Kilometer zurück; die übrigen $4 - 35 \cdot a$ Kilometer fährt er mit 30 km/h und braucht dafür

$$\frac{4 - 35 \cdot a}{30} = \frac{4}{30} - \frac{35}{30}\,a$$

Stunden. Insgesamt benötigt er $\frac{4}{30} - \frac{5}{30}\,a$ Stunden für die ersten 4 km, er spart also $\frac{5}{30}\,a$ Stunden gegenüber der Fahrt ohne Motor. Wenn er auf den folgenden drei Abschnitten b, c bzw. d Stunden mit Motor fährt, spart er insgesamt

$$\frac{5}{30}\,a + \frac{5}{20}\,b + \frac{5}{10}\,c + \frac{5}{15}\,d \tag{1}$$

Stunden. Hierbei soll nun $a + b + c + d$ gleich $\frac{1}{6}$ sein. Weil $\frac{5}{10}$ größer ist als $\frac{5}{30}$, $\frac{5}{20}$ und $\frac{5}{15}$, wird die Summe in (1) am größten, wenn $a = b = d = 0$ und $c = \frac{1}{6}$ ist. Er sollte also alle 10 Minuten in dem Abschnitt nutzen, wo es bergauf geht. Das ist auch tatsächlich möglich, denn für 3 km braucht man bei 15 km/h mehr als 10 Minuten.

Ohne Motor würde er

$$\frac{4}{30} + \frac{12}{20} + \frac{3}{10} + \frac{5}{15}$$

Stunden, also 82 Minuten brauchen. Nun spart er $\frac{5}{10} \cdot \frac{1}{6}$ Stunden, also 5 Minuten.

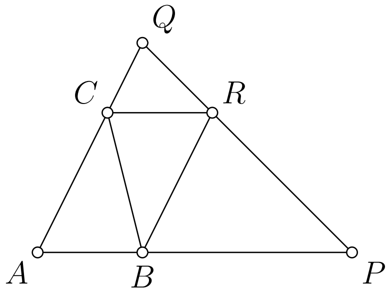
Er kann daher frühestens nach 77 Minuten, also um 20:17 Uhr, zu Hause sein.

560942 Lösung *7 Punkte*

Die gegebene Gleichung ist gleichbedeutend mit

$$\frac{|AC|}{|QC|} = \frac{|PB|}{|AB|}\,. \tag{1}$$

Es sei nun h die Parallele zur Geraden AB durch C. Dann liegen P und Q auf verschiedenen Seiten von h, die Strecke $\overline{PQ}$ schneidet also h in einem Punkt R.



Wegen des Strahlensatzes mit Strahlen von Q aus ergibt sich

$$\frac{|PR|}{|QR|} = \frac{|AC|}{|QC|} .$$

Wegen (1) folgt hieraus

$$\frac{|PR|}{|QR|} = \frac{|PB|}{|AB|} .$$

Nach der Umkehrung des Strahlensatzes mit Strahlen von P aus folgt somit $BR \parallel AC$. Daher ist der Punkt R auf der Strecke $\overline{PQ}$ der Schnittpunkt der Parallelen zu AB durch C und der Parallelen zu AC durch B. Dieser Schnittpunkt ist aber unabhängig von den Wahlen von P und Q. Alle möglichen Geraden PQ enthalten also diesen Punkt R.

560943 Lösung *7 Punkte*

Teil a) Wir geben zwei solche Verfahren an:

Verfahren 1: Die Sammler bestimmen unter sich einen Tauschleiter. Jeder der anderen 24 Sammler schickt an diesen einen Brief mit seinen 24 Doppelten. Der Tauschleiter fügt seine 24 Doppelten hinzu und sortiert alle Doppelten nach Empfänger. Er versendet 24 Briefe mit den jeweils 24 fehlenden Bildern an die anderen Sammler und behält die 24 ihm fehlenden für sich. Insgesamt werden 48 Briefe verschickt.

Verfahren 2: Die Sammler bestimmen unter sich eine Reihenfolge, so dass wir sie im Folgenden mit Sammler 1, Sammler 2, ..., Sammler 25 bezeichnen. Sammler 1 schickt zuerst seine 24 Doppelten an Sammler 2. Dann schickt Sammler 2 alle Bilder, die nicht für ihn gedacht waren, plus seine eigenen Doppelten an Sammler 3. Dann schickt Sammler 3 alle Bilder, die nicht für ihn gedacht waren, plus seine eigenen Doppelten an Sammler 4, und so weiter bis zu Sammler 25. Dieser erhält sämtliche von ihm benötigten Bilder (und noch weitere) von Sammler 24. Sammler 25 schickt nun alle Bilder, die nicht für ihn gedacht waren, plus seine eigenen Doppelten an Sammler 1, der in diesem Brief dann die von ihm noch benötigten Bilder erhält. Sammler 1 schickt nun alle Bilder, die nicht für ihn gedacht waren, an Sammler 2, der in diesem Brief dann die restlichen von ihm noch benötigten Bilder erhält, und so weiter, bis zum letzten Brief von Sammler 23 an Sammler 24. Auch bei diesem Verfahren werden insgesamt 48 Briefe verschickt.

Teil b) Wir zeigen, dass mindestens 48 Briefe verschickt werden müssen, damit jeder alle benötigten Bilder erhält. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass keine zwei Briefe gleichzeitig unterwegs sind. Jeder Sammler muss offensichtlich mindestens einmal Bilder verschicken. Denjenigen Sammler, der als letzter seinen ersten Brief verschickt, bezeichnen wir mit S. Wenn nun S seinen ersten Brief verschickt, sind zuvor also schon mindestens

24 andere Briefe verschickt worden. Andererseits muss auch jeder der 24 anderen Sammler danach noch Post bekommen, denn die Bilder von S müssen noch die richtigen Empfänger finden. Es müssen also insgesamt mindestens $24 + 24 = 48$ Briefe verschickt werden. Die in a) angegebenen Verfahren sind folglich optimal.