56. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 10
Lösungen – 1. Tag

561041 Lösung *6 Punkte*

Wenn Tom auf den ersten 4 km für eine Zeit von a Stunden den Motor hinzuschaltet, dann fährt er für a Stunden 35 km/h und legt in dieser Zeit $35 \cdot a$ Kilometer zurück; die übrigen $4 - 35 \cdot a$ Kilometer fährt er mit 30 km/h und braucht dafür

$$\frac{4 - 35 \cdot a}{30} = \frac{4}{30} - \frac{35}{30}\,a$$

Stunden. Insgesamt benötigt er $\frac{4}{30} - \frac{5}{30}\,a$ Stunden für die ersten 4 km, er spart also $\frac{5}{30}\,a$ Stunden gegenüber der Fahrt ohne Motor. Wenn er auf den folgenden drei Abschnitten b, c bzw. d Stunden mit Motor fährt, spart er insgesamt

$$\frac{5}{30}\,a + \frac{5}{20}\,b + \frac{5}{10}\,c + \frac{5}{15}\,d \tag{1}$$

Stunden. Hierbei soll nun $a + b + c + d$ gleich $\frac{1}{6}$ sein. Weil $\frac{5}{10}$ größer ist als $\frac{5}{30}$, $\frac{5}{20}$ und $\frac{5}{15}$, wird die Summe in (1) am größten, wenn $a = b = d = 0$ und $c = \frac{1}{6}$ ist. Er sollte also alle 10 Minuten in dem Abschnitt nutzen, wo es bergauf geht. Das ist auch tatsächlich möglich, denn für 3 km braucht man bei 15 km/h mehr als 10 Minuten.

Ohne Motor würde er

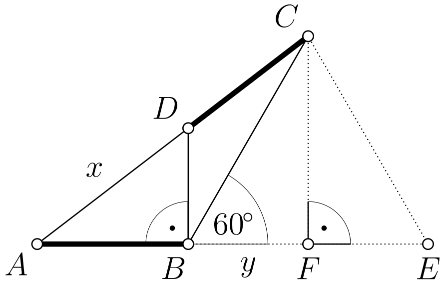
$$\frac{4}{30} + \frac{12}{20} + \frac{3}{10} + \frac{5}{15}$$

Stunden, also 82 Minuten brauchen. Nun spart er $\frac{5}{10} \cdot \frac{1}{6}$ Stunden, also 5 Minuten.

Er kann daher frühestens nach 77 Minuten, also um 20:17 Uhr, zu Hause sein.

561042 Lösung *7 Punkte*

Erste Lösung:



L 561042 a

Es sei F der Lotfußpunkt von C auf die Gerade AB und E derjenige Punkt auf AB, für den F der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BE}$ ist. Dann ist das Dreieck BEC gleichschenklig mit Basiswinkel 60°, also gleichseitig.

Nun sei $x = |AD|$ und $y = |BF|$, folglich $|BC| = 2\,y$.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$|CF|^2 = |BC|^2 - |BF|^2 = (2\,y)^2 - y^2\,,$$

und daher ist $|CF| = \sqrt{3}\,y$.

Wegen $BD \parallel FC$ liefert der Strahlensatz

$$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|BF|}\,,$$

also $x = \frac{1}{y}$.

Im rechtwinkligen Dreieck AFC ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras

$$|AC|^2 = |AF|^2 + |FC|^2\,,$$

also

$$(1 + x)^2 = (1 + y)^2 + 3\,y^2$$

und damit

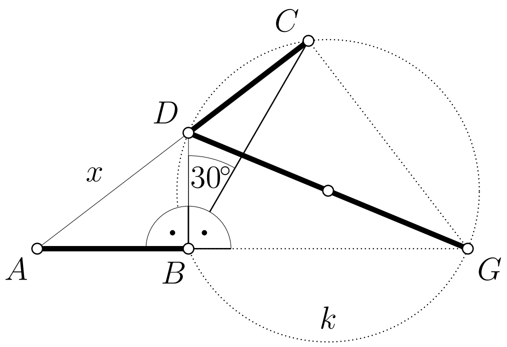
$$x^2 + 2\,x = \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\,.$$

Damit gilt

$$x \cdot (x + 2) = \frac{2}{x^2} \cdot (x + 2)\,.$$

Wegen $x \neq -2$ folgt hieraus $x = \frac{2}{x^2}$ und damit $x = \sqrt[3]{2}$.

Zweite Lösung:



L 561042 b

Wie zuvor sei $x = |AD|$. Zudem sei G der Schnittpunkt der Senkrechten zu Gerade AD durch C mit Gerade AB. Der Punkt B liegt zwischen A und G, denn die Winkel $\sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle BAC$ sind spitz, da im Dreieck ABC ein anderer Winkel bereits 120° groß ist. Damit ist das Viereck $CDBG$ nicht überschlagen und wegen der gegenüberliegenden rechten Innenwinkel bei B und C ein Sehnenviereck, dessen Umkreis k sei.

Nun ist $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle CBA| - |\sphericalangle DBA| = 30°$ die Größe des Umfangswinkels über der Sehne $\overline{DC}$. Die Größe des entsprechenden Mittelpunktswinkels beträgt also $60°$ und somit hat k den Radius $|DC| = 1$. Weiterhin ist $|\sphericalangle GBD| = 90°$ und somit $\overline{DG}$ nach Umkehrung des Thalessatzes ein Durchmesser des Kreises, also $|DG| = 2$.

Außerdem gilt gemäß Sekantensatz

$$x\,(x+1) = |AD| \cdot |AC| = |AB| \cdot |AG| = |AG| \ ,$$

also

$$|BG| = |AG| - |AB| = x^2 + x - 1 \,.$$

Der Satz des Pythagoras, angewendet auf die rechtwinkligen Dreiecke ABD und BGD, ergibt

$$|AD|^2 - |AB|^2 = |BD|^2 = |DG|^2 - |BG|^2 \ ,$$

also $x^2 - 1 = 4 - (x^2 + x - 1)^2$. Diese Gleichung kann weiter umgeformt werden:

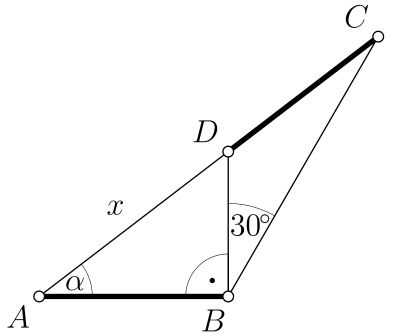
$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= -x^4 - 2\,x^3 + x^2 + 2\,x + 3 \,, \\ x^4 + 2\,x^3 - 2\,x - 4 &= 0 \,, \\ (x+2) \cdot (x^3 - 2) &= 0 \,, \end{aligned}$$

woraus wegen $x \neq -2$

$$x^3 = 2$$

folgt. Damit ergibt sich $x = \sqrt[3]{2}$.

Dritte Lösung:



L 561042 c

Wir bezeichnen $\alpha = |\sphericalangle BAD|$, $y = \cos(\alpha)$ und $x = |AD|$. Dann gilt

$$x = \frac{|AB|}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{y}\,,\ |BD| = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\,,\ |\sphericalangle DCB| = 60° - \alpha \ \text{ und } \ |\sphericalangle CBD| = 30°\,.$$

Nach dem Sinussatz im Dreieck BCD gilt

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{\sin(60° - \alpha)}{\sin(30°)}\,,$$

also

$$\sin(30°) \cdot \tfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \sin(60° - \alpha)\,.$$

Daraus ergibt sich mit dem Additionstheorem für die Sinusfunktion die Gleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \sin(60^\circ)\,\cos(\alpha) - \cos(60^\circ)\,\sin(\alpha) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\cos(\alpha) - \tfrac{1}{2}\,\sin(\alpha)\,,$$

welche sich nach Multiplikation mit $2\,y = 2\,\cos(\alpha)$ zu

$$(1+y)\,\sin(\alpha) = \sqrt{3}\,y^2$$

und durch Quadrieren sowie wegen $\sin^2(\alpha) = 1 - y^2$ zu

$$(1+y)^2(1-y^2) = 3\,y^4$$

oder äquivalent

$$0 = 4\,y^4 + 2\,y^3 - 2\,y - 1 = (2\,y^3 - 1)\,(2\,y + 1)$$

umformen lässt. Wegen $y > 0$ ergibt sich $y^3 = \frac{1}{2}$ und damit $x = \frac{1}{y} = \sqrt[3]{2}$.

561043 Lösung *7 Punkte*

In den Kisten ist insgesamt für $1 + 2 + \cdots + 11 = 66$ Bälle Platz. Sind in der Kiste mit der Nummer k genau b Bälle, so sagen wir, in der Kiste sind $k - b$ *ungenutzte Plätze.*

Teil a) Angenommen, 52 der Bälle sind beige, und von den übrigen Farben gibt es jeweils einen Ball. Könnte man diese Bälle in der angegebenen Art auf die Kisten verteilen, dann gäbe es fünf Kisten, in denen keine beigen Bälle liegen, und diese hätten zusammen mindestens $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ungenutzte Plätze. Das ist ein Widerspruch, da $n + 10 = 67 > 66$ gilt.

Teil b) Wir beschreiben einen Algorithmus, der die Bälle auf die Kisten verteilt: Zu Beginn legen wir alle Bälle in eine Wanne. Nun wählen wir in jedem Schritt die größte noch leere Kiste aus sowie eine Farbe, die in der Wanne am häufigsten vorkommt. Dann legen wir so viele Bälle dieser Farbe wie möglich aus der Wanne in die Kiste, also bis die Kiste voll ist oder bis keine weiteren Bälle dieser Farbe in der Wanne sind. So fahren wir fort, bis keine Bälle mehr in der Wanne oder keine leeren Kisten mehr vorhanden sind.

Wir zeigen nun, dass dieser Algorithmus die gewünschte Verteilung vornimmt. Im Folgenden sprechen wir vom *Zustand* (k, b, f), wenn die Kisten mit den Nummern $1, 2, \ldots, k$ noch frei sind, höchstens b Bälle noch nicht verteilt sind und unter diesen Bällen höchstens f verschiedene Farben vorkommen. Zu Beginn liegt also der Zustand $(11, 56, 6)$ vor. Wir machen nun einige Feststellungen:

(i) Befindet man sich im Zustand (k, b, f) und gilt $b' \geq b$ und $f' \geq f$, so befindet man sich auch im Zustand (k, b', f').

(ii) Befindet man sich im Zustand (k, b, f) und gilt $f > b$, so befindet man sich auch im Zustand (k, b, b), weil b Bälle nur höchstens b unterschiedliche Farben haben können.

(iii) Befindet man sich im Zustand (k, b, f) und führt nun einen Schritt im oben beschriebenen Algorithmus durch, so gelangt man in den Zustand $(k - 1, b - k, f)$ oder in den Zustand $\left(k - 1, b - \left\lceil \frac{b}{f} \right\rceil, f - 1\right)$.

Den letzten Punkt sieht man wie folgt ein: Kommt die vom Algorithmus gewählte Farbe mindestens k Mal vor, so werden k Bälle dieser Farbe in die Kiste mit der Nummer k gefüllt, und man gelangt zum Zustand $(k - 1, b - k, f)$. Anderenfalls kommt die gewählte Farbe mindestens $\left\lceil \frac{b}{f} \right\rceil$ Mal vor, es bleiben also nach dem Schritt noch höchstens $b - \left\lceil \frac{b}{f} \right\rceil$ Bälle übrig, und weil man alle verbliebenen Bälle dieser Farbe in die Kiste gepackt hat, verbleiben höchstens $f-1$ verschiedene Farben. Man landet also im Zustand $\left(k-1, b-\left\lceil \frac{b}{f} \right\rceil, f-1\right)$.

Aus (i) bis (iii) folgt, dass der Algorithmus das folgende Zustandsdiagramm von oben nach unten entlang der eingezeichneten Linien durchläuft. Befindet man sich beispielsweise im Zustand $(7,23,4)$, so gelangt man gemäß (iii) zu $(6,16,4)$ oder zu $(6,17,3)$. In beiden Fällen ist man gemäß (i) im Zustand $(6,17,4)$.

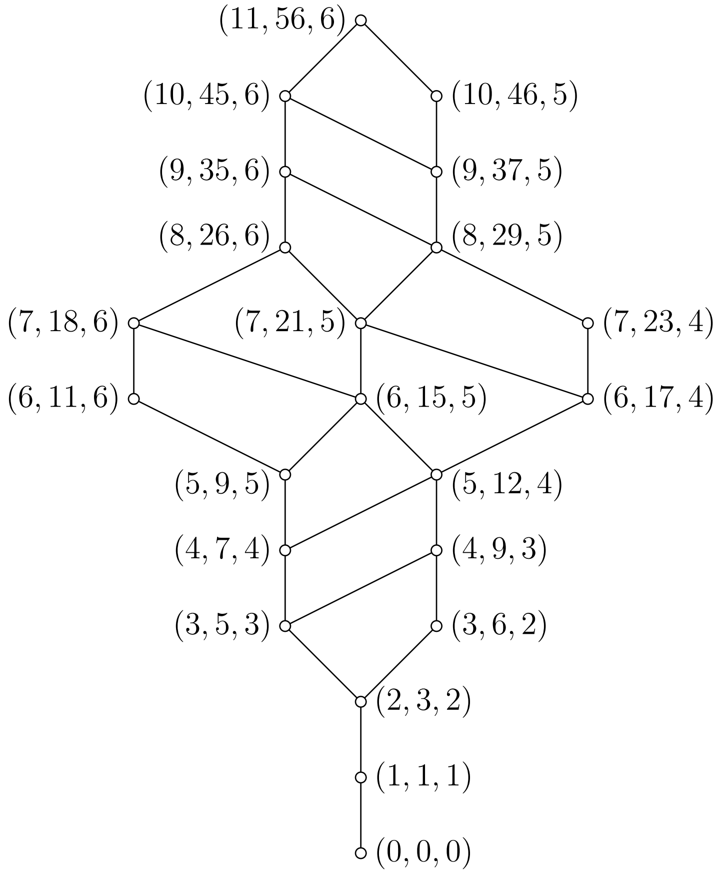


Abbildung: Zustandsdiagramm

Man erreicht in elf Schritten also immer den Zustand $(0,0,0)$, was bedeutet, dass alle Bälle wie gewünscht verteilt sind.

Lösungsvariante:

Teil a) wird wie in der ersten Lösung behandelt. Für Teil b) benutzen wir denselben Algorithmus wie oben, geben aber einen anderen Nachweis, dass der Algorithmus das Gewünschte tut. Dazu führen wir eine Fallunterscheidung durch.

Fall 1: Nach Beendigung des Algorithmus gibt es mindestens eine komplett leere Kiste.

Dann muss der Algorithmus geendet haben, weil keine Bälle mehr in der Wanne lagen. Also wurden alle Bälle wie gewünscht auf die Kisten verteilt.

Fall 2: Nach Beendigung des Algorithmus gibt es keine komplett leere Kiste.

Wir untersuchen nun die Anzahl ungenutzter Plätze in den Kisten. Wir betrachten dazu einen Schritt des Algorithmus, in dem ungenutzte Plätze in einer Kiste entstanden. Wir bezeichnen mit k die Nummer der gewählten Kiste, mit f die Anzahl der vorkommenden Farben in der

Wanne, mit b die Anzahl der in der Wanne befindlichen Bälle der gewählten Farbe (jeweils vor der Durchführung des Schrittes) und mit $u = k - b > 0$ die Anzahl der ungenutzten Plätze in der Kiste.

Fall 2a: Es gibt mindestens eine Kiste mit $u \geq f - 1$, also $k - f + 1 \geq b$.

Dann wurden in diesem und den $f - 1$ folgenden Schritten jeweils alle verbleibenden Bälle einer Farbe in eine Kiste gelegt, weil die entsprechenden Kisten die Nummern $k, k-1, k-2, \ldots, k-f+1$ haben und von keiner der f Farben noch mehr als b Bälle vorhanden waren. Es wurden also alle Bälle aller verbleibenden Farben auf die Kisten verteilt.

Fall 2b: Es gilt stets $u \leq f - 2$.

In jedem der Schritte, in dem ungenutzte Plätze entstanden, reduzierte sich die Anzahl der in der Wanne vorkommenden Farben um 1. Die Gesamtzahl der ungenutzten Plätze beträgt somit höchstens gleich $(F-2) + (F-3) + \cdots + 2 + 1$, wobei F die Anzahl der Farben zu Beginn bezeichnet, also $F = 6$. Daher ist die Anzahl der ungenutzten Plätze höchstens gleich 10; weil es insgesamt 66 Plätze gibt, hat der Algorithmus alle 56 Bälle verteilt.

Anmerkung: Ein ähnlicher Beweis zeigt, dass es stets möglich ist,

$$(1 + 2 + \cdots + N) - (1 + 2 + 3 + \cdots + (F-2)) = \frac{1}{2}\left(N\,(N+1) - (F-2)\,(F-1)\right)$$

Bälle in F Farben auf Kisten mit Nummern $1, 2, \ldots, N$ auf die gewünschte Art zu verteilen.