56. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 10
Lösungen – 2. Tag

561044 Lösung *6 Punkte*

Es gibt genau 16 solche Zahlen.

Wir können für die weiteren Untersuchungen $a > 1$ voraussetzen, da $a = 1$ nicht die geforderte Eigenschaft hat. Jede natürliche Zahl $a > 1$ hat eine eindeutige Primfaktorzerlegung $a = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$ mit verschiedenen Primzahlen p_i und positiven ganzen Zahlen a_i.

Die Quadratzahlen, welche die Zahl a mit dieser Primfaktorzerlegung teilen, sind genau die Zahlen b, die sich in der Form $b = p_1^{2b_1} \cdot p_2^{2b_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{2b_n}$ darstellen lassen mit ganzen Zahlen b_i, für die $0 \le b_i \le \frac{a_i}{2}$ gilt. Für die Wahl von b_i mit dieser Eigenschaft gibt es genau $\left\lfloor \frac{a_i}{2} \right\rfloor + 1$ Möglichkeiten. Somit hat a insgesamt $t = \left(\left\lfloor \frac{a_1}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\left\lfloor \frac{a_n}{2} \right\rfloor + 1\right)$ Teiler, die Quadratzahlen sind. Hierbei bezeichnet $\lfloor z \rfloor$ die größte ganze Zahl, die z nicht übersteigt.

Damit diese Anzahl t gleich 7 ist, muss einer der Faktoren gleich 7 und alle anderen müssen gleich 1 sein, das heißt, eines der a_i ist gleich 12 oder 13 und alle anderen a_i sind gleich 1.

Wäre nun diejenige Primzahl, welche 12- oder 13-fach in der Primfaktorzerlegung von a vorkommt, größer als 2, so wäre

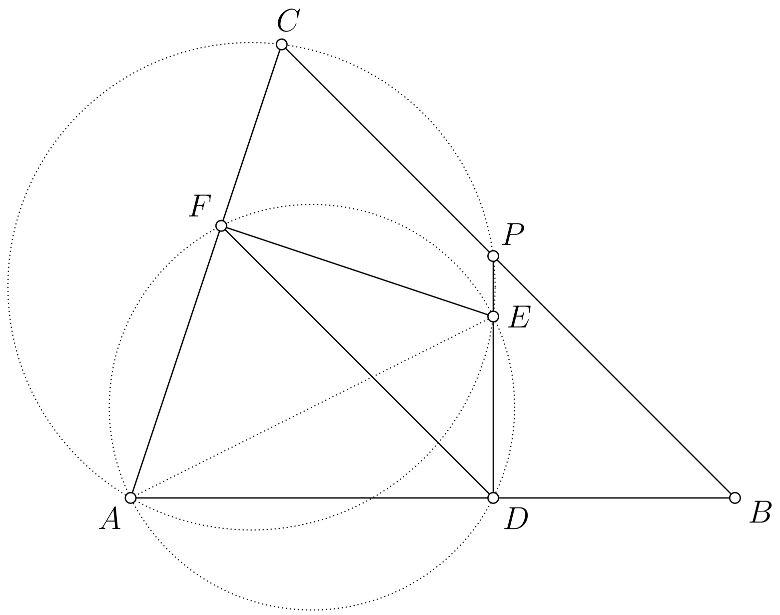
$$a \ge 3^{12} = 27^4 > 20^4 = 160\,000 > 100\,000\,.$$

Folglich ist a von der Form $a = 2^{12} \cdot k$ mit einer positiven ganzen Zahl k, die gleich 1 oder eine Primzahl oder ein Produkt von verschiedenen Primzahlen ist.

Für $k \ge 25$ ist a mindestens gleich $2^{12} \cdot 25 = 4\,096 \cdot 25 > 100\,000$. Für $k < 25$ gilt hingegen $a \le 2^{12} \cdot 24 = 98\,304 < 100\,000$. Wir überprüfen also alle $k < 25$ darauf, ob k gleich 1 oder eine Primzahl oder ein Produkt von verschiedenen Primzahlen ist, und erhalten die Lösungen

$$a = 2^{12} \cdot k \quad \text{mit } k \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23\}\ .$$

Folglich gibt es genau 16 solche Zahlen, wie behauptet.



L 561045

Erste Lösung:

Das (konvexe) Viereck $ADEF$ ist ein Sehnenviereck, da D und F beide auf dem Thaleskreis über der Strecke $\overline{AE}$ liegen. D und F liegen dabei auf verschiedenen Seiten der Geraden AE, da E im Inneren, D und F aber auf den Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AC}$ des Dreiecks ABC liegen.

Da P und E auf derselben Seite der Geraden AC liegen, ist das Viereck $AEPC$ konvex und wegen $|\sphericalangle CEA| = |\sphericalangle CPA|$ ist es ebenfalls ein Sehnenviereck.

Damit gilt

$$|\sphericalangle PDF| = |\sphericalangle EDF| = |\sphericalangle EAF| \ ,$$

weil E auf der Strecke $\overline{DP}$ sowie D und A auf dem Umkreis des Sehnenvierecks $ADEF$ und auf derselben Seite der Sehne $\overline{EF}$ liegen,

$$|\sphericalangle EAF| = |\sphericalangle EAC| = 180° - |\sphericalangle CPE| \ ,$$

weil F auf der Strecke $\overline{AC}$ sowie A und P auf dem Umkreis des Sehnenvierecks $AEPC$, aber auf verschiedenen Seiten der Sehne $\overline{CE}$ liegen,

$$180° - |\sphericalangle CPE| = 180° - |\sphericalangle CPD| \ ,$$

weil E auf der Strecke $\overline{PD}$ liegt, und

$$180° - |\sphericalangle CPD| = |\sphericalangle DPB| \ ,$$

weil $\sphericalangle DPB$ Nebenwinkel von $\sphericalangle CPD$ ist.

Also ist $|\sphericalangle PDF| = |\sphericalangle DPB|$ und mit der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes folgt daraus, dass die Geraden DF und $BP = BC$ parallel sind, was zu zeigen war.

Zweite Lösung:

Aus der Konstruktion folgt, dass die Punkte A, D, E, P, C und F in dieser Reihenfolge auf dem Rand des konvexen Vierecks $ADPC$ liegen. Damit liegen E und F auf derselben Seite der Geraden AD, während C und E auf verschiedenen Seiten der Geraden AP liegen.

Weiterhin ist $ADEF$ ein Sehnenviereck, da D und F auf dem Thaleskreis über $\overline{AE}$ liegen, und $AEPC$ ist ein Sehnenviereck, da P und E auf derselben Seite der Geraden AC liegen und $|\sphericalangle CEA| = |\sphericalangle CPA|$ gilt.

Es folgt

$$|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle AFD|\ ,$$

da E und F im Sehnenviereck $ADEF$ auf derselben Seite der Sehne $\overline{AD}$ liegen,

$$|\sphericalangle ACP| = 180° - |\sphericalangle PEA|\ ,$$

da C und E im Sehnenviereck $AEPC$ auf verschiedenen Seiten der Sehne $\overline{AP}$ liegen, und

$$180° - |\sphericalangle PEA| = |\sphericalangle AED|$$

als Nebenwinkel.

Damit gilt $|\sphericalangle AFD| = |\sphericalangle ACP|$ und die Parallelität $DF \parallel PC = BC$ folgt aus der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes.

561046 Lösung *7 Punkte*

Erste Lösung:

Teil a) Wir müssen zeigen, dass jede zulässige Funktion $f(x)$ eine Nullstelle x mit $-\frac{3}{2} \leq x \leq 3$ hat.

Dies ist sicher der Fall, wenn $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$ oder $f(3) = 0$ gilt oder wenn $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ und $f(3)$ verschiedene Vorzeichen haben. Es bleibt der Fall zu untersuchen, dass $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ und $f(3)$ beide verschieden von null sind und gleiches Vorzeichen haben. Es gilt

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 + q \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + r \quad \text{und} \quad f(3) = 3^3 + q \cdot 3 + r$$

und damit

$$8 \cdot f\left(-\frac{3}{2}\right) + f(3) = (-27 - 12\,q + 8\,r) + (27 + 3\,q + r) = 9\,(r - q)\,.$$

$r - q$ ist also auch verschieden von null und hat dasselbe Vorzeichen wie $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ und $f(3)$.

Aus $\frac{q}{r} > 1$ und $r \neq 0$ folgt nach Multiplikation mit r^2 nacheinander $q\,r > r^2$ und $r\,(q - r) > 0$. $r = f(0)$ und $r - q$ sind also verschieden von null und haben verschiedenes Vorzeichen. Damit haben auch $f(0)$ und $f(3)$ verschiedenes Vorzeichen. Die Funktion $f(x)$ hat in diesem Fall also eine Nullstelle x mit $0 \leq x \leq 3$ und damit auch im zu untersuchenden Intervall.

Teil b) Zum Beweis der Aussage ist zu zeigen, dass es für jedes $b < 3$ eine zulässige Funktion $f(x)$ gibt, die keine Nullstelle w mit $w \leq b$ hat.

Dazu untersuchen wir Funktionen mit $q = r = t \neq 0$. Solche Funktionen sind zulässig. $f(x)$ hat eine vorgegebene Nullstelle $w < 3$ genau dann, wenn $w^3 + t\,w + t = 0$ und damit $t = -\frac{w^3}{w+1}$ gilt.

Wir fixieren nun w mit $0 < w < 3$ und betrachten die zulässige Funktion

$$f(x) = x^3 - \frac{w^3}{w+1}\,x - \frac{w^3}{w+1} = (x - w) \cdot \left(x^2 + w\,x + \frac{w^2}{w+1}\right)\,.$$

Der Term in der Klammer kann durch quadratische Ergänzung umgeformt werden zu

$$g(x) = x^2 + w\,x + \frac{w^2}{w+1} = \left(x + \frac{w}{2}\right)^2 + \frac{w^2\,(3-w)}{4\,(w+1)}\,.$$

Wegen $0 < w < 3$ gilt $g(x) > 0$ für alle x und w ist die einzige reelle Nullstelle von $f(x)$.

Für $b < 3$ wählen wir eine Zahl $w > 0$ mit $b < w < 3$. Die zugehörige Funktion $f(x)$ hat dann nur eine einzige reelle Nullstelle w, und für diese gilt $w > b$.

Teil c) Zum Beweis der Aussage ist zu zeigen, dass es für jedes $a > -\frac{3}{2}$ eine zulässige Funktion $f(x)$ gibt, die keine Nullstelle w mit $a \le w \le 3$ hat.

Wir fixieren $w \ne -1$ und betrachten wieder $f(x)$ und $g(x)$ wie oben. Es gilt

$$g(3) = 9 + 3\,w + \frac{w^2}{w+1} = \frac{(2\,w+3)^2}{w+1}$$

und

$$g(w) = 2\,w^2 + \frac{w^2}{w+1} = \frac{w^2 \cdot (2\,w+3)}{w+1}\,.$$

Für $-\frac{3}{2} < w < -1$ folgt $g(3) < 0$ und $g(w) < 0$. Da $g(x)$ eine nach oben geöffnete Parabel ist, hat $g(x)$ keine Nullstelle x mit $w \le x \le 3$. Folglich hat $f(x) = (x-w)\cdot g(x)$ in diesem Fall keine Nullstelle x mit $w < x \le 3$.

Für $a > -\frac{3}{2}$ wählen wir nun $w < -1$ mit $-\frac{3}{2} < w < a$. Die zugehörige zulässige Funktion $f(x) = (x-w)\cdot g(x)$ hat dann keine Nullstelle x mit $w < x \le 3$ und damit erst recht keine Nullstelle mit $a \le x \le 3$.

Zweite Lösung:

Teil a) Wir haben zu zeigen, dass jede zulässige Funktion $f(x)$ eine Nullstelle x mit $-\frac{3}{2} \le x \le 3$ hat.

Angenommen, es gäbe eine zulässige Funktion $f(x)$ ohne Nullstellen in diesem Intervall. Da wegen $\frac{q}{r} \ge 1$ das Reziproke $\frac{r}{q}$ existiert und zwischen null und eins liegt, gilt

$$-\frac{3}{2} < -\frac{r}{q} < 0 < 3 \quad \text{und} \quad f\left(-\frac{r}{q}\right) = -\left(\frac{r}{q}\right)^3 < 0\,.$$

Damit gilt laut dem Hinweis der Aufgabenstellung $f(x) < 0$ für $x \in \left\{-\frac{3}{2}, 0, 3\right\}$, also

$$r = f(0) < 0\,, \tag{1}$$

$$-\frac{27}{8} - \frac{3}{2}\,q + r = f\left(-\frac{3}{2}\right) < 0\,, \tag{2}$$

$$27 + 3\,q + r = f(3) < 0\,. \tag{3}$$

Addiert man das Achtfache von (2) zu (3), ergibt sich $-9\,q + 9\,r < 0$ was wegen (1) bei Division durch $9\,r$ in $1 - \frac{q}{r} > 0$ übergeht und dem gegebenen $\frac{q}{r} \ge 1$ widerspricht. Damit ist die Annahme der Existenz einer zulässigen Funktion $f(x)$ ohne Nullstellen in diesem Intervall widerlegt und $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$ gehört zu M.

Teil b) Es ist zu zeigen, dass es für jedes $b < 3$ ein zulässiges f gibt, das keine Nullstellen $x \le b$ hat. Ist $b_1 < b_2$ und f eine zulässige Funktion, die keine Nullstellen $x \le b_2$ hat, so ist f auch ein Beispiel für eine zulässige Funktion, die keine Nullstellen $x \le b_1$ hat. Deshalb genügt es zum Beweis der Aussage im Aufgabenteil b), für jedes b mit $0 < b < 3$ ein zulässiges f anzugeben, welches für alle $x \le b$ negativ ist.

Wir betrachten hierzu zunächst die Funktion

$$g(x) = (x-b)\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = x^3 - \frac{3}{4}\,b^2\,x - \frac{1}{4}\,b^3\,.$$

Offenbar gilt $g(x) \le 0$ für $x \le b$. Aus $0 < b < 3$ folgt $\frac{1}{4}\,b^3 < \frac{3}{4}\,b^2$ und damit

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{4}\,b^2\,x - \frac{3}{4}\,b^2 < g(x)\,.$$

Diese zulässige Funktion f ist also für alle $x \le b$ negativ und die Behauptung folgt.

Teil c) Es ist zu zeigen, dass es für jedes $a > -\frac{3}{2}$ ein zulässiges f gibt, das keine Nullstellen x mit $a \le x \le 3$ hat. Dazu genügt es wieder, für jedes a mit $0 > a > -\frac{3}{2}$ ein zulässiges f anzugeben, welches für alle x mit $a \le x \le 3$ negativ ist.

Wir betrachten zunächst die Funktion

$$g(x) = (x-a)\,(x+3+a)\,(x-3) = x^3 + q_0\,x + r_0$$

mit $q_0 = (3\,a - (a+3)^2) = -\,(a^2 + 3\,a + 9) < 0$ und $r_0 = 3\,a\,(3+a) < 0$. Die Vorzeichen ergeben sich jeweils, da $0 > a > -\frac{3}{2}$ vorausgesetzt ist.

Für x mit $a \le x \le 3$ gilt $x - a \ge 0$, $x - 3 \le 0$ und aus $a > -\frac{3}{2}$ folgt $0 < 3 + 2\,a \le x + 3 + a$. Auch hier ist also $g(x) \le 0$ für alle x mit $a \le x \le 3$. Außerdem gilt

$$r_0 - q_0 = 3\,a\,(3+a) + \left(a^2 + 3\,a + 9\right) = 4\,a^2 + 12\,a + 9 = (2\,a+3)^2 > 0$$

wegen $a > -\frac{3}{2}$ und folglich

$$f(x) = x^3 + q_0\,x + q_0 < x^3 + q_0\,x + r_0 = g(x)\,.$$

Daher ist diese zulässige Funktion f negativ für alle x mit $a \le x \le 3$ und die Behauptung folgt.

Dritte Lösung:

Aus $r \neq 0$ und $\frac{q}{r} \neq 0$ folgt $q \neq 0$. Die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 + q\,x + r$ lassen sich deshalb als Lösungen der Gleichung $x^3 = -q\,x - r$ bestimmen und fallen mit den x-Koordinaten der Schnittpunkte der Normkubik $k(x) = x^3$ und der linearen Funktion $l(x) = -q\,x - r = m\,(x - t_0)$ mit $m = -q$, $t_0 = -\frac{r}{q}$ zusammen. Hierbei ist m der Anstieg der linearen Funktion und t_0 deren Nullstelle. Damit ist die Funktion f genau dann zulässig, wenn $m \neq 0$ und $-1 \le -\frac{r}{q} = t_0 < 0$ gilt. Wir bezeichnen deshalb eine lineare Funktion $l(x) = m\,(x - t_0)$ mit $m \neq 0$ und $-1 \le t_0 < 0$ ebenfalls als *zulässig.*

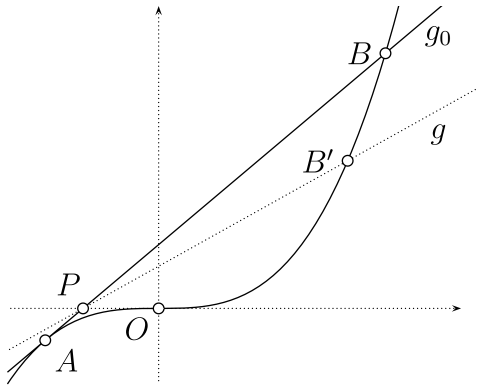
Im Weiteren spielt die zulässige Funktion

$$f_0(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \cdot (x-3) = x^3 - \frac{27}{4}\,x - \frac{27}{4}$$

mit den Nullstellen $x_1 = -\frac{3}{2}$ und $x_2 = 3$ eine wichtige Rolle.

Der Funktionsgraph von f_0 berührt die x-Achse in x_1 von unten und wechselt in x_2 das Vorzeichen von negativ zu positiv: Es ist $f_0(x) < 0$ für $x < 3$, $x \neq x_1$ und $f_0(x) > 0$ für $x > 3$.

Die Nullstellen x_1 und x_2 sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte $A\left(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{8}\right)$ und $B\,(3, 27)$ der Normkubik mit der linearen Funktion $l_0(x) = \frac{27}{4}\,(x+1)$. Der Graph dieser linearen Funktion ist eine Gerade g_0, welche die Normkubik im Punkt A berührt, durch die Nullstelle $P(-1, 0)$ geht und die Normkubik ein weiteres Mal im Punkt B schneidet, siehe Abbildung L 561046. Die Strecke $\overline{AB}$ und das Stück von k zwischen A und B begrenzen damit eine Fläche F. $O(0,0)$ bezeichnet den Ursprung des Koordinatensystems.



L 561046

Teil a) Wir müssen zeigen, dass jede zulässige Funktion $f(x) = x^3 - l(x)$ eine Nullstelle x mit $-\frac{3}{2} \leq x \leq 3$ hat.

Der Graph der linearen Funktion $l(x) = m\,(x - t_0)$ ist eine Gerade g, welche die Strecke $\overline{PO}$ wegen $-1 \leq t_0 < 0$ entweder im Inneren oder im Punkt P schneidet. In beiden Fällen hat g mindestens zwei Punkte mit dem Rand von F gemeinsam. Folglich ist entweder $g = g_0$ oder g schneidet die Strecke $\overline{AB}$ in höchstens einem Punkt, weshalb sie k zwischen A und B in mindestens einem weiteren Punkt B' schneiden muss. In jedem Fall erhalten wir einen gemeinsamen Punkt von g und k, der auf k zwischen A und B liegt.

Da $f(x)$ genau dann eine Nullstelle x mit $-\frac{3}{2} \leq x \leq 3$ hat, wenn sich g und k zwischen A und B schneiden, ist der geforderte Beweis erbracht.

Teil b) Zum Beweis der Aussage ist zu zeigen, dass es für jedes $b < 3$ eine zulässige Funktion $f(x)$ gibt, die keine Nullstelle w mit $w \leq b$ hat.

Dazu genügt es zu zeigen, dass es eine zulässige lineare Funktion $l(x) = m\,(x - t_0)$ gibt, die k in einem einzigen Punkt $B'\,(b', b'^3)$ schneidet, und für diesen Punkt zusätzlich $b' > b$ gilt.

Wir wählen dazu $b' > 0$ mit $b < b' < 3$ und die lineare Funktion $l(x) = m\,(x + 1)$ mit $m = \frac{b'^3}{b'+1}$, deren Graph g durch P und B' verläuft, siehe Abbildung L 561046. Da $l(x)$ für $x < -1$ oberhalb von $l_0(x)$ verläuft, hat $l(x)$ keine Schnittpunkte mit k im Bereich $x \leq 0$. Aus der Konvexität von k für $x > 0$ folgt weiter, dass B' der einzige Schnittpunkt von g und k ist.

Die so konstruierte lineare Funktion $l(x)$ hat also die geforderte Eigenschaft. Damit hat die zulässige Funktion $f(x) = x^3 - l(x)$ nur genau eine Nullstelle b', und für diese gilt $b < b' < 3$.

Teil c) Zum Beweis der Aussage ist zu zeigen, dass es für jedes $a > -\frac{3}{2}$ eine zulässige Funktion $f(x)$ gibt, die keine Nullstelle w mit $a \leq w \leq 3$ hat.

Wir wählen dazu eine Zahl a' mit $a' < -1$ und $-\frac{3}{2} < a' < a$ und betrachten die lineare Funktion $l(x) = m\,(x + 1)$ mit $m = \frac{a'^3}{a'+1}$, deren Graph g durch P und $A'\,(a', a'^3) \in k$ verläuft. Da k die Gerade g_0 in A von unten her berührt, liegt A' unterhalb der Geraden g_0. Da P aber auf beiden Geraden g und g_0 liegt und die x-Koordinate von A' kleiner als die von P ist, hat die Gerade g einen größeren Anstieg als die Gerade g_0. Folglich hat $l(x)$ keine Schnittpunkte mit k im Bereich $a' < x \leq 3$.

Die zulässige Funktion $f(x) = x^3 - l(x)$ hat damit keine Nullstelle x mit $a \leq x \leq 3$.