56. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 11
Lösungen – 1. Tag

561141 Lösung *6 Punkte*

Aus dem gegebenen Gleichungssystem

$$x^2 + py + q = 0\,, \tag{1}$$
$$y^2 + px + q = 0 \tag{2}$$

wird zunächst die Differenz (1) – (2) gebildet:

$$(x - y)(x + y - p) = 0\,.$$

Es ergeben sich zwei Fälle, deren Ergebnis dann jeweils in (1) eingesetzt wird.

Fall 1: $y = x$, d. h. $x^2 + px + q = 0$. Dann liefert

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,, \qquad y_{1,2} = x_{1,2}$$

genau zwei reelle Lösungen für $q < p^2/4$, genau eine reelle Lösung für $q = p^2/4$ und keine reelle Lösung für $q > p^2/4$.

Fall 2: $y \neq x$, d. h. $y = p - x$ und damit $x \neq p/2$ und $x^2 - px + p^2 + q = 0$. In diesem Fall ergeben sich aus

$$x_{3,4} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{-\frac{3p^2}{4} - q}\,, \qquad y_{3,4} = p - x_{3,4} = x_{4,3}$$

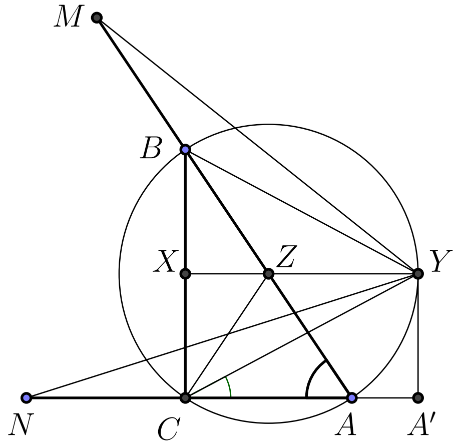
genau zwei reelle Lösungen für $q < -3p^2/4$ (für beide gilt $x \neq p/2$) und keine reelle Lösung für $q > -3p^2/4$. Der Fall $q = -3p^2/4$ liefert als einzige Lösung $x = p/2$, die schon in Fall 1 gezählt wurde.

Da sichergestellt wurde, dass jede Lösung in genau einem Fall behandelt wird, ist die Fallunterscheidung vollständig. Da $p^2 \geq 0$ gilt, ergibt sich zusammengefasst:

- Keine Lösung existiert für $q > p^2/4$.
- Genau eine Lösung gibt es für $q = p^2/4$.
- Genau zwei Lösungen gibt es für $-3p^2/4 \leq q < p^2/4$ (dies ist nur für $p \neq 0$ möglich).
- Genau drei Lösungen gibt es nie.
- Genau vier Lösungen ergeben sich für $q < -3p^2/4$.
- Mehr als vier Lösungen existieren nie.

561142 Lösung *7 Punkte*

Erste Lösung: Es sei Z der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC. Da das Dreieck ABC rechtwinklig ist, halbiert Z die Hypotenuse $\overline{AB}$ und liegt auf der Mittelsenkrechten der Kathete $\overline{BC}$. Der Fußpunkt der Mittelsenkrechten heiße X, und Y sei derjenige Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit dem Umkreis, für den Z zwischen X und Y liegt. Dann ist $\overline{AC} \parallel \overline{XY}$. Der Punkt A' ergänze das rechtwinklige Dreieck CYX zu einem Rechteck, in dem $\overline{CY}$ eine Diagonale ist (vgl. Abbildung L 561142 a).



L 561142 a

Die rechtwinkligen Dreiecke BXY, CXY und $YA'C$ besitzen nach dieser Konstruktion gleich lange Katheten und sind damit kongruent nach dem Kongruenzsatz (sws). Setzt man $|\sphericalangle ACY| = |\sphericalangle A'CY| = \alpha$, so gilt auch $|\sphericalangle ZYC| = |\sphericalangle XYC| = \alpha$.

Die Dreiecke BZY und YZC haben jeweils zwei Radien und eine Hypotenuse dieser rechtwinkligen Dreiecke als Seiten, sind also zueinander kongruent nach (sss) und darüber hinaus gleichschenklig. Für ihre Basiswinkel folgt

$$|\sphericalangle ZBY| = |\sphericalangle BYZ| = |\sphericalangle YCZ| = |\sphericalangle ZYC| = \alpha\,.$$

Für zwei Nebenwinkel ergibt sich

$$|\sphericalangle YCN| = 180° - \alpha = |\sphericalangle YBM|\ .$$

Die Dreiecke NCY und MBY sind demnach kongruent nach (sws), also gilt $|\sphericalangle NYC| = |\sphericalangle MYB|$.

Wird $|\sphericalangle BAC| = \beta$ gesetzt, so folgt nach dem Peripheriewinkelsatz über der Sehne $\overline{BC}$ die Gleichheit $|\sphericalangle BYC| = \beta$.

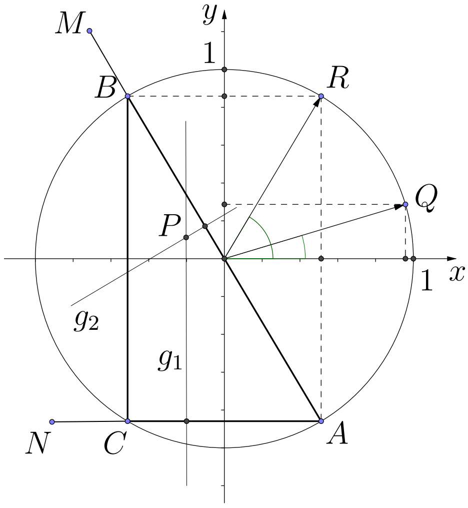
Da C zwischen A und N sowie B zwischen A und M liegt und die Sehne $\overline{YC}$ den Durchmesser $\overline{AB}$ schneidet, folgt weiter auch

$$|\sphericalangle MYN| = |\sphericalangle BYC| - |\sphericalangle NYC| + |\sphericalangle MYB| = |\sphericalangle BYC| = \beta = |\sphericalangle MAN|\ .$$

Nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes liegen also A und Y auf einem gemeinsamen Kreisbogen über der Sehne $\overline{NM}$, d. h. auf dem Umkreis des Dreiecks AMN.

Da der Punkt Y unabhängig von der Lage der Punkte M und N konstruiert worden ist, kann Y als Punkt D gewählt werden.

Zweite Lösung: Wir führen ein Koordinatensystem ein, in dem der Umkreis des Dreiecks ABC zum Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ wird und die Kathete $\overline{AC}$ parallel zur x-Achse mit negativer y-Koordinate, die Kathete $\overline{BC}$ parallel zur y-Achse mit negativer x-Koordinate zu liegen kommt. Der Punkt R, der das Dreieck ABC zum Rechteck ergänzt, liegt dann ebenfalls auf dem Einheitskreis (vgl. Abbildung L 561142 b).



L 561142 b

Für die Koordinaten von R können wir dann $x_R = \cos\alpha$, $y_R = \sin\alpha$ mit $0° < \alpha < 90°$ wählen. Für die Eckpunkte des Dreiecks ABC erhalten wir die Koordinaten

$$x_A = \cos\alpha\,,\quad x_B = x_C = -\cos\alpha\,,\quad y_A = y_C = -\sin\alpha\,,\quad y_B = \sin\alpha\,.$$

Mit $|BM| = |CN| = a$ ergibt sich für die Punkte M und N

$$x_M = -(1+a)\cos\alpha\,,\quad y_M = (1+a)\sin\alpha\,,\quad x_N = -\cos\alpha - a\,,\quad y_N = -\sin\alpha\,.$$

Die Mittelsenkrechte g_1 der Strecke $\overline{AN}$ steht senkrecht im Mittelpunkt mit den Koordinaten $(-a/2, -\sin\alpha)$. Die Mittelsenkrechte g_2 der Strecke $\overline{AM}$ geht durch den Mittelpunkt $(-(a/2)\cos\alpha, (a/2)\sin\alpha)$ und hat den Anstiegswinkel $90° - \alpha$. Um den Mittelpunkt P des Umkreises des Dreiecks AMN zu ermitteln, berechnen wir den Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2:

$$\begin{aligned}
x_P &= -\frac{a}{2}\,,\\
y_P &= \frac{a}{2}\sin\alpha + \tan(90° - \alpha)\left(x_P + \tfrac{a}{2}\cos\alpha\right)\\
&= \frac{a}{2}\left(\sin\alpha + \frac{\sin(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)}(-1 + \cos\alpha)\right) = \frac{a}{2}\left(\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(-1 + \cos\alpha)\right)\\
&= \frac{a}{2\sin\alpha}\left(\sin^2\alpha - \cos\alpha + \cos^2\alpha\right) = \frac{a}{2}\cdot\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}\\
&= \frac{a}{2}\cdot\tan\frac{\alpha}{2}\,.
\end{aligned}$$

Wir berechnen nun alle Schnittpunkte Q des Umkreises des Dreiecks AMN mit dem Einheitskreis. Dazu wählen wir

$$x_Q = \cos\varphi\,,\quad y_Q = \sin\varphi \quad \text{mit} \quad -180° < \varphi \le 180°$$

und bezeichnen den Umkreisradius des Dreiecks AMN mit r. Dann gilt

$$r^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 = 1 + x_P^2 + y_P^2 - 2(x_P x_Q + y_P y_Q)\,.$$

Den Radius r berechnen wir für den Punkt A:

$$r^2 = (x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2 = 1 + x_P^2 + y_P^2 - 2(x_P x_A + y_P y_A)\,.$$

Q liegt also genau dann auf beiden Kreisen, wenn die Differenz beider Gleichungen null ergibt.

$$\begin{aligned}
0 &= x_P(x_Q - x_A) + y_P(y_Q - y_A) \\
&= -\frac{a}{2}\left(\cos\varphi - \cos\alpha\right) + \frac{a}{2}\cdot\tan\frac{\alpha}{2}\left(\sin\varphi + \sin\alpha\right)\,, \\
0 &= \cos\frac{\alpha}{2}\left(-\cos\varphi + \cos\alpha\right) + \sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\varphi + \sin\alpha\right) \qquad (1) \\
&= 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\varphi-\alpha}{2}\sin\frac{\varphi+\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\varphi-\alpha}{2}\sin\frac{\varphi+\alpha}{2}\,, \\
0 &= \left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\varphi-\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\varphi-\alpha}{2}\right)\cdot\sin\frac{\varphi+\alpha}{2} \\
&= \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\varphi-\alpha}{2}\right)\sin\frac{\varphi+\alpha}{2} = \sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi+\alpha}{2}\,.
\end{aligned}$$

Wegen $-90° < \varphi/2 \leq 90°$ und $0 < \alpha/2 < 90°$, also $-90° < (\varphi+\alpha)/2 < 180°$, gibt es dafür genau zwei Lösungen.

Der zweite Faktor wird nur null für $\varphi + \alpha = 0$, das ist die triviale Lösung $Q \equiv A$.

Der erste Faktor verschwindet genau für $\varphi = 0$. Das ist der gesuchte Punkt: Alle Umkreise der Dreiecke AMN schneiden sich im Punkt $D = Q$ mit den Koordinaten $x_Q = \cos 0° = 1$ und $y_Q = \sin 0° = 0$, der offensichtlich nicht von der Länge a abhängt.

Anmerkungen: Es ist nicht notwendig, die Gleichung zu lösen. Wenn man zeigt, das $Q = A$ kein Berührungspunkt der Umkreise ist (dann müsste P auf dem Durchmesser $\overline{AB}$ liegen, was offensichtlich nicht der Fall ist), reicht es zu argumentieren, dass es einen zweiten Schnittpunkt geben muss, der nach Gleichung (1) nicht von a abhängt.

Die Aufgabe 561142 ist ein Spezialfall der Aufgabe 561242. Bei der Aufgabe 561242 wird nicht vorausgesetzt, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

561143 Lösung — *7 Punkte*

Teil a) Nein, Wallenstein kann den Sieg nicht erzwingen. Wenn Wallenstein „teilt“, kann Tilly anschließend eine andere Kompanie so „teilen“, dass eine Kompanie mit genau einem Zinnsoldaten entsteht. Da danach jedes „Herrschen“ zum sofortigen Verlieren des Spiels führt, kann nur noch geteilt werden, die Anzahl von 49 Zinnsoldaten bleibt also erhalten. Nach $40 = 49 - 7 - 2$ weiteren Teilungen bestehen alle Kompanien nur noch aus einem Zinnsoldaten. Der nächste Zug führt also zwangsläufig zum Verlust. Da diesen Zug Wallenstein ausführen muss, verliert er spätestens dann.

Reduziert Wallenstein im ersten Zug jedoch alle Kompanien um einen Zinnsoldaten, so kann Tilly eine beliebige Kompanie von dann sechs Zinnsoldaten in eine von fünf und eine von einem zerlegen. Dann gilt Gleiches wie im ersten Fall, und das Spiel erreicht bereits nach $34 = 7 \cdot 6 - 7 - 1$ Zügen die Situation, dass jede Kompanie nur noch aus einem Zinnsoldaten besteht. Wieder ist dann Wallenstein am Zuge.

Teil b) Für den allgemeinen Fall führen wir neben den Kennzahlen M und N noch die Anzahl $D = N - M$ der überzähligen Zinnsoldaten und $Z = \min\{n_1, n_2, \ldots, n_M\}$, die kleinste Anzahl von Zinnsoldaten einer Kompanie, ein. Der Wert jeder dieser Kennzahlen ändert sich möglicherweise von Zug zu Zug. Die Befehle wirken sich im Einzelnen wie folgt aus:

„Herrsche!“: Wenn $Z > 1$ ist, bleibt M erhalten, N und D vermindern sich jeweils um M und Z um eins. In diesem Fall verläuft der Zug ohne Verlust einer Kompanie. Ist dagegen $Z = 1$, so geht mindestens eine Kompanie verloren, und das Spiel endet.

„Teile!“: M erhöht sich um eins, N bleibt erhalten und D vermindert sich um eins. Hierbei kann Z erhalten bleiben oder sich verkleinern. „Teile!“ ist nur möglich, wenn $D > 0$ gilt.

Außerdem tauschen Tilly und Wallenstein bei jedem Zug die Rolle des *Anziehenden*, der den nächsten Befehl gibt, und des *Nachziehenden*, der erst danach wieder am Zug ist. Wir nennen eine Situation, in der der Anziehende erzwingen kann, dass der Nachziehende verliert, eine *Gewinnstellung*, jede andere Stellung *Verluststellung.*

Es ist nicht möglich, dass das Spiel unendlich lange dauert. Denn in jedem Zug, der noch keine sofortige Niederlage darstellt, wird D kleiner, und dies kann nur endlich oft geschehen.

Gibt es für den Anziehenden einen Zug, der eine Verluststellung erreicht, so ist die aktuelle Situation eine Gewinnstellung. Führen dagegen alle möglichen Züge zu Gewinnstellungen, so liegt eine Verluststellung vor. Nach diesen Regeln bewerten wir alle möglichen Situationen, wobei sich zunächst einige Fälle unproblematisch überlappen werden.

Fall 1: Es ist $D = 0$.
Dann besteht jede Kompanie aus einem Soldaten. Nur der Befehl „Herrsche!“ kann ausgeführt werden und führt zum sofortigen Verlust. Das ist eine *Verluststellung.*

Fall 2: Es ist $Z = 1$.
Es gibt also eine Kompanie, die aus nur einem einzigen Soldaten besteht. Also wird kein Spieler den Befehl „Herrsche!“ geben, denn dies würde seine sofortige Niederlage bedeuten. Es werden also beide so lange teilen, bis eine Situation erreicht ist, in der dies nicht mehr möglich ist und derjenige, der damit konfrontiert wird, verliert. Da sich der Wert von D in jedem Zug um genau 1 verringert, gibt es die beiden folgenden Teilfälle:

Fall 2.1: D ist gerade.
Das ist eine *Verluststellung.*

Fall 2.2: D ist ungerade.
Das ist eine *Gewinnstellung.*

Fall 3: Es ist $Z > 1$ und D ungerade.
Dann gibt es eine Kompanie mit $n > 1$ Zinnsoldaten, die im Verhältnis $(n - 1) : 1$ aufgeteilt werden kann. Danach liegt Fall 2.1 für den Nachziehenden vor. Wir haben also eine *Gewinnstellung.*

Fall 4: Es ist $Z > 1$, D gerade und M ungerade.
Dann vermindert sich bei „Teile!“ D um eins, bei „Herrsche!“ um M, wird also jeweils ungerade. Nach Fall 3 oder, falls sich Z dabei auf 1 vermindert, Fall 2.2 ist dies also eine *Verluststellung.*

Fall 5: Es ist $Z > 1$, D gerade und M gerade.
Wie im Fall 4 führt „Teile!“ auf Fall 3 oder Fall 2.2, also zum Verlust für den Anziehenden, der folglich „Herrsche!“ befehlen muss. Dann bleibt M erhalten, und D bleibt gerade. Dabei vermindert sich Z um eins. Sofern danach immer noch $Z > 1$ gilt, ist damit für den Nachziehenden erneut die Situation von Fall 5 hergestellt, ansonsten die Situation von Fall 2.1. Solange $Z > 1$ gilt, wird also abwechselnd der Befehl „Herrsche!“ erteilt. Wer den Fall $Z = 1$ erzeugt, hat gewonnen. Es gibt also zwei Teilfälle:

Fall 5.1: Es sind D, M und Z gerade.
Das ist eine *Gewinnstellung.*

Fall 5.2: Es sind D und M gerade, Z ungerade.
Das ist eine *Verluststellung.*

Damit sind alle Fälle erfasst. Zusammenfassend heißt das:

Wallenstein verliert genau dann, wenn entweder D gerade und M ungerade ist oder D gerade, M gerade und Z ungerade. Dies ist gleichbedeutend dazu, dass entweder N und M ungerade sind oder N und M gerade und Z ungerade.

Resultat: Wallenstein verliert genau dann, wenn eine ungerade Anzahl von Zinnsoldaten auf eine ungerade Anzahl von Kompanien aufgeteilt worden ist oder wenn bei einer geraden Anzahl von Zinnsoldaten und einer geraden Anzahl von Kompanien die kleinste Kompaniestärke ungerade ist. In jedem anderen Fall kann Wallenstein den Sieg erzwingen.

Bemerkung: Natürlich reicht es aus, Teil b) zu lösen und festzustellen, dass Teil a) eine Verluststellung darstellt.