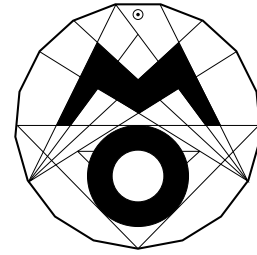


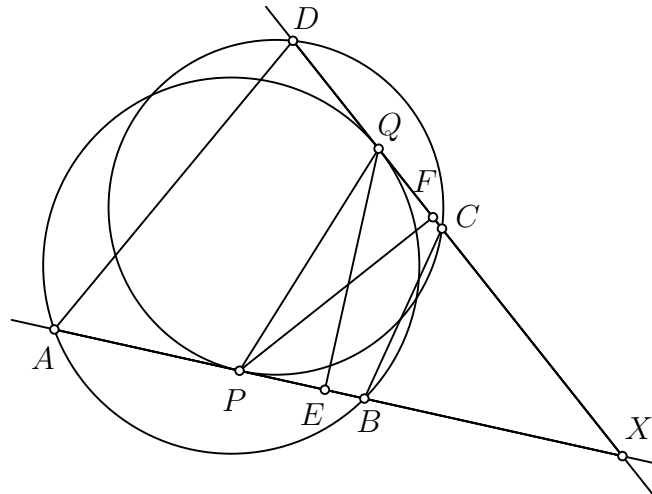
56. Mathematik-Olympiade
 4. Stufe (Bundesrunde)
 Olympiadeklasse 11
 Lösungen – 2. Tag



© 2017 Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.
 www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

561144 Lösung

6 Punkte



L 561144

Weil der Kreis durch C , D und P nur einen Punkt mit der Geraden AB gemeinsam hat, muss P dieser Berührungspunkt sein, vgl. Abbildung L 561144. Entsprechend berührt der Kreis durch A , B und Q die Gerade CD im Punkt Q .

Sind die Geraden AB und CD parallel, so ist die Behauptung offensichtlich wahr. Sind sie nicht parallel, so bezeichne X ihren Schnittpunkt. Da A , B , C und D als Eckpunkte eines Sehnenvierecks auf einem Kreis liegen, gilt nach dem Sekantensatz $|XA| \cdot |XB| = |XC| \cdot |XD|$.

Die Gerade XQ ist Tangente an den Kreis durch A , B und Q , womit nach dem Sekanten-Tangenten-Satz $|XA| \cdot |XB| = |XQ|^2$ gilt. Analog erhält man $|XC| \cdot |XD| = |XP|^2$ und damit $|XP| = |XQ|$. Damit ist das Dreieck PXQ gleichschenkelig, und die Höhen \overline{PF} und \overline{QE} in diesem Dreieck sind gleich lang. Folglich hat der Punkt P von der Geraden CD denselben Abstand wie der Punkt Q von der Geraden AB .

561145 Lösung

7 Punkte

Zur Abkürzung setzen wir

$$T = \frac{x}{1-yz} + \frac{y}{1-zx} + \frac{z}{1-xy}.$$

Wegen $x, y, z \geq 0$ und $x + y + z = 1$ ist $y + z \leq 1$, woraus mit der bekannten Ungleichung $4yz \leq (y+z)^2$ (oder der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel) $yz \leq 1/4$

folgt. Entsprechend gelten die Abschätzungen $xy \leq 1/4$ und $zx \leq 1/4$. Die Nenner der drei Summanden von T sind also stets positiv. Mit den Umformungen

$$\frac{a}{1-bc} - a = abc \cdot \frac{1}{1-bc},$$

angewandt auf die zyklischen Vertauschungen von x, y und z für a, b und c , erhalten wir die linke Ungleichung:

$$T = T - x - y - z + 1 = xyz \left(\frac{1}{1-yz} + \frac{1}{1-zx} + \frac{1}{1-xy} \right) + 1 \geq 1.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn (wenigstens) eine der Variablen 0 ist.

Um die rechte Ungleichung zu beweisen, schätzen wir für $0 \leq \sqrt{bc} \leq 1/2$ ab

$$\frac{1}{1-bc} = \frac{1}{(1-\sqrt{bc})(1+\sqrt{bc})} \leq \frac{1}{1-\sqrt{bc}} = \frac{1+2\sqrt{bc}}{1+\sqrt{bc}(1-2\sqrt{bc})} \leq 1+2\sqrt{bc} \leq 1+b+c$$

und erhalten

$$T \leq xyz((1+y+z) + (1+z+x) + (1+x+y)) + 1 = xyz(3+2(x+y+z)) + 1 = 5xyz + 1.$$

Aus der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel der drei Zahlen x, y und z folgt $xyz \leq 1/27$. Das liefert schließlich die rechte Ungleichung

$$T \leq \frac{5}{27} + 1 = \frac{32}{27} < \frac{5}{4}.$$

561146 Lösung

7 Punkte

Für eine solche Zahl m seien die m aufeinanderfolgenden Zahlen die Zahlen $n+1$ bis $n+m$. Mit der bekannten Summenformel für Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

erhält man aus der Problemstellung nacheinander die (wegen $m > 0$) äquivalenten Gleichungen

$$m^3 = \frac{(n+m)(n+m+1)(2n+2m+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$6m^3 = 2m^3 + (6n+3)m^2 + (6n^2+6n+1)m,$$

$$0 = -4m^2 + 6n^2 + 6mn + 3m + 6n + 1.$$

Um die linearen Terme zu eliminieren, formt man weiter um:

$$\begin{aligned} 0 &= -4m^2 + 6n^2 + 6mn + 3m + 6n + 1 \\ &= -4m^2 + 6\left(n + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}m^2 + 3m + 6n + 1 \end{aligned}$$

$$= -\frac{11}{2}m^2 + 6\left(n + \frac{m}{2}\right)^2 + 6\left(n + \frac{m}{2}\right) + 1$$

$$= -\frac{11}{2}m^2 + 6\left(n + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} + 1,$$

$$0 = -11m^2 + 3(2n+m+1)^2 - 1.$$

Mit der Substitution $k = 2n + m + 1$ werden also Lösungen von

$$3k^2 - 11m^2 = 1 \tag{1}$$

in ganzen Zahlen gesucht. Diese Gleichung erinnert an eine Pell-Gleichung und hat die Lösung $m = 1, k = 2$. Findet man eine weitere Lösung, so lässt sich mit dieser eine Rekursionsvorschrift zur Berechnung beliebig vieler Lösungen aufstellen.

Durch die Substitution $l = 3k$ wird die Gleichung (1) zunächst in eine Pell-Gleichung umgeformt,

$$\begin{aligned} 9k^2 - 33m^2 &= 3, \\ l^2 - 33m^2 &= 3. \end{aligned} \tag{2}$$

Damit auch k ganzzahlig ist, werden Lösungen von Gleichung (2) mit $3 \mid l$ gesucht. Eine solche Lösung ist $(l, m) = (6, 1)$. Um daraus weitere Lösungen zu konstruieren, verwendet man eine nicht-triviale Lösung von

$$p^2 - 33q^2 = 1.$$

Man findet $(23, 4)$. Damit lässt sich (2) äquivalent umformen:

$$\begin{aligned} (l^2 - 33m^2) (23^2 - 33 \cdot 4^2) &= 3, \\ (l + \sqrt{33}m) (l - \sqrt{33}m) (23 + \sqrt{33} \cdot 4) (23 - \sqrt{33} \cdot 4) &= 3, \\ (l + \sqrt{33}m) (23 + \sqrt{33} \cdot 4) (l - \sqrt{33}m) (23 - \sqrt{33} \cdot 4) &= 3, \\ (23l + 33 \cdot 4m + (4l + 23m)\sqrt{33}) (23l + 33 \cdot 4m - (4l + 23m)\sqrt{33}) &= 3, \\ (23l + 132m)^2 - 33 \cdot (4l + 23m)^2 &= 3. \end{aligned}$$

Ist also das Paar (l, m) eine Lösung von (2), so gilt dies auch für $(23l + 132m, 4l + 23m)$. Man beachte dabei, dass $3 \mid l$ tatsächlich $3 \mid 23l + 132m$ impliziert. Mit $l = 3k$ erhalten wir für k und m die Rekursionsvorschrift

$$(k, m) \quad \longrightarrow \quad (23k + 44m, 12k + 23m),$$

die aus $(k, m) = (2, 1)$ die Lösung $(90, 47)$ liefert. Aus $k = 2n + m + 1$ erhält man dann $n = 21$. Also ist eine (die zweitkleinste) Lösung

$$\underbrace{22^2 + 23^2 + \dots + 68^2}_{47 \text{ Summanden}} = 47^3.$$

Da die Rekursion unverändert m ungerade und k gerade lässt, ist auch n immer ganzzahlig. Damit ist bewiesen, dass es unendlich viele positive ganze Zahlen m gibt, die der Bedingung der Aufgabenstellung genügen.