56. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 12
Lösungen – 1. Tag

<u>561241 Lösung</u> *6 Punkte*

Aus dem gegebenen Gleichungssystem

$$x^2 + py + q = 0\,, \qquad (1)$$
$$y^2 + px + q = 0 \qquad (2)$$

wird zunächst die Differenz (1) − (2) gebildet:

$$(x - y)(x + y - p) = 0\,.$$

Es ergeben sich zwei Fälle, deren Ergebnis dann jeweils in (1) eingesetzt wird.

Fall 1: $y = x$, d. h. $x^2 + px + q = 0$. Dann liefert

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,, \qquad y_{1,2} = x_{1,2}$$

genau zwei reelle Lösungen für $q < p^2/4$, genau eine reelle Lösung für $q = p^2/4$ und keine reelle Lösung für $q > p^2/4$.

Fall 2: $y \neq x$, d. h. $y = p - x$ und damit $x \neq p/2$ und $x^2 - px + p^2 + q = 0$. In diesem Fall ergeben sich aus

$$x_{3,4} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{-\frac{3p^2}{4} - q}\,, \qquad y_{3,4} = p - x_{3,4} = x_{4,3}$$

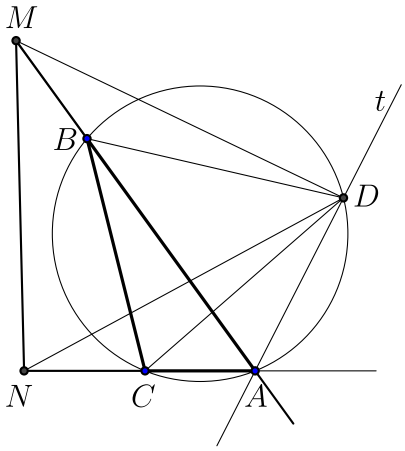
genau zwei reelle Lösungen für $q < -3p^2/4$ (für beide gilt $x \neq p/2$) und keine reelle Lösung für $q > -3p^2/4$. Der Fall $q = -3p^2/4$ liefert als einzige Lösung $x = p/2$, die schon in Fall 1 gezählt wurde.

Da sichergestellt wurde, dass jede Lösung in genau einem Fall behandelt wird, ist die Fallunterscheidung vollständig. Da $p^2 \geq 0$ gilt, ergibt sich zusammengefasst:

- Keine Lösung existiert für $q > p^2/4$.
- Genau eine Lösung gibt es für $q = p^2/4$.
- Genau zwei Lösungen gibt es für $-3p^2/4 \leq q < p^2/4$ (dies ist nur für $p \neq 0$ möglich).
- Genau drei Lösungen gibt es nie.
- Genau vier Lösungen ergeben sich für $q < -3p^2/4$.
- Mehr als vier Lösungen existieren nie.

561242 Lösung *7 Punkte*

Erste Lösung:



L 561242

Die Winkelhalbierende t der Außenwinkel im Punkt A des Dreiecks ABC ist keine Tangente an den Umkreis dieses Dreiecks, denn andernfalls würde die Winkelhalbierende des Innenwinkels senkrecht zu einer Tangente stehen, also durch den Mittelpunkt des Umkreises verlaufen. Sie wäre dann Symmetrieachse des Dreiecks ABC. Damit müsste $|AB| = |AC|$ gelten.

Deshalb schneidet t den Umkreis des Dreiecks ABC noch in einem von A verschiedenen Punkt D, vgl. Abbildung L 561242. Es wird gezeigt, dass D die geforderten Eigenschaften hat.

Es wird nur der Fall $|AB| > |AC|$ betrachtet. Der Beweis im anderen Fall verläuft analog mit vertauschten Rollen der Punkte B und C.

Betrachtet werden zwei beliebige auf den Strahlen AB und AC, aber außerhalb des Dreiecks ABC befindliche Punkte M beziehungsweise N, die der Bedingung $|BM| = |CN|$ genügen.

Nach dem Peripheriewinkelsatz über der Sehne $\overline{AD}$ gilt $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD|$ und damit auch für die Nebenwinkel $|\sphericalangle DBM| = |\sphericalangle DCN|$.

Es ist

$$|\sphericalangle DAB| = \frac{1}{2}\left(180^\circ - |\sphericalangle BAC|\right) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\,|\sphericalangle BAC|\ .$$

Damit ist

$$|\sphericalangle DAC| = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\,|\sphericalangle BAC|\ .$$

Das Viereck $CADB$ ist Sehnenviereck im Umkreis des Dreiecks ABC. Daher folgt

$$|\sphericalangle CBD| = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\,|\sphericalangle BAC|\ .$$

Die Winkel $\sphericalangle DCB$ und $\sphericalangle DAB$ sind Peripheriewinkel zur Sehne $\overline{BD}$, also ist

$$|\sphericalangle DCB| = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\,|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CBD|\ .$$

Daher sind die Sehnen zu diesen Winkeln gleich lang: $|DB| = |DC|$.

Somit sind die beiden Dreiecke BDM und CDN kongruent nach (sws), und damit ist $|\sphericalangle BMD| = |\sphericalangle CND|$.

Aus der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes über $\overline{AD}$ folgt, dass die Punkte A, D, M und N auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Der Umkreis des Dreiecks AMN verläuft also durch den Punkt D.

Zweite Lösung: Die Punkte D, M und N seien wie in der ersten Lösung gewählt. Es wird gezeigt, dass $ADMN$ ein Sehnenviereck ist.

Wie oben wird nur der Fall $|AB| > |AC|$ betrachtet.

Die Annahme $|AB| > |AC|$ führt dazu, dass D und C auf verschiedenen Seiten der Geraden AB liegen, sodass sich die Punkte B und M innerhalb des Winkelbereichs $\sphericalangle DAN$ befinden.

Da $ADBC$ ein Sehnenviereck ist, gilt nach dem Satz von Ptolemäus für $ADBC$

$$|AC| \cdot |BD| + |AD| \cdot |BC| = |AB| \cdot |CD| \ .$$

Bezeichnet O den Mittelpunkt und r den Radius des Umkreises von $ADBC$, so gilt nach dem Peripherie-Zentriwinkelsatz $|\sphericalangle DOB| = 2\,|\sphericalangle DAB|$, und die Länge der Sehne $\overline{BD}$ ist gegeben durch $|BD| = 2r\sin\left(|\sphericalangle DOB|/2\right)$, also

$$|BD| = 2r\sin|\sphericalangle DAB| \ .$$

Analog ist

$$\begin{aligned}|BC| &= 2r\sin|\sphericalangle BAC| \ ,\\ |CD| &= 2r\sin|\sphericalangle DAC| \ .\end{aligned}$$

Mit diesen Beziehungen ist die Aussage des Satzes von Ptolemäus äquivalent zu

$$|AC| \cdot \sin|\sphericalangle DAB| + |AD| \cdot \sin|\sphericalangle BAC| = |AB| \cdot \sin|\sphericalangle DAC| \ .$$

Mit dieser Äquivalenz und der Umkehrung des Satzes von Ptolemäus genügt es nun, die Gleichung

$$|AN| \cdot \sin|\sphericalangle DAM| + |AD| \cdot \sin|\sphericalangle MAN| = |AM| \cdot \sin|\sphericalangle DAN|$$

zu zeigen.

Die Subtraktion beider Gleichungen zeigt, dass es ausreicht,

$$|CN| \cdot \sin|\sphericalangle DAB| = |BM| \cdot \sin|\sphericalangle DAC|$$

zu überprüfen, was jedoch wegen $|BM| = |CN|$ und $|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle DAC| = 180°$ trivial ist.

Dritte Lösung: Die Punkte D, M und N seien wie in der ersten Lösung gewählt. Dass die Punkte A, D, M und N auf einem Kreis liegen, soll nach Inversion an einem geeigneten Kreis um den Punkt A mit Hilfe des Satzes von Menelaos bewiesen werden.

Wir setzen dazu $b = |AC|$, $c = |AB|$ und $x = |BM| = |CN|$. Ferner sei k_1 der Kreis um A mit dem Radius $\sqrt{bc}$. Die Inversion an k_1 bilde B, C, M und N auf B', C', M' bzw. N' ab.

Die Punkte B' und C' liegen auf den Strahlen AB bzw. AC und erfüllen $|AB'| = b$ bzw. $|AC'| = c$. Ebenso liegen die Punkte M' und N' so auf den Strecken $\overline{AB'}$ und $\overline{AC'}$, dass

$$|AM'| = \frac{bc}{c+x} \quad \text{beziehungsweise} \quad |AN'| = \frac{bc}{b+x}$$

gilt.

Da D zusammen mit A, B und C auf einem gemeinsamen Kreis liegt, muss sich D' auf der Geraden $B'C'$ befinden. Außerdem handelt es sich bei AD' um eine Außenwinkelhalbierende des Dreiecks $AB'C'$.

Die Behauptung der Aufgabe ist dazu äquivalent, dass die Punkte D', M' und N' kollinear sind. Die Umkehrung des Satzes von Menelaos zeigt, dass dazu nur

$$\frac{|C'N'|}{|N'A|} \cdot \frac{|AM'|}{|M'B'|} \cdot \frac{|B'D'|}{|D'C'|} = 1$$

bewiesen werden muss.

Es sei B'' der Punkt, der durch Spiegelung von B' an der Geraden AD' entsteht. Da AD' Außenwinkelhalbierende des Dreiecks $AB'C'$ ist, liegt B'' auf der Geraden AC'. Im Dreieck $C'B''D'$ ist die Gerade $D'A$ eine Innenwinkelhalbierende, die die Seite $\overline{B''C'}$ in A schneidet. Nach dem Winkelhalbierendensatz ist $|AB''| \,/\, |AC'| = |B''D'| \,/\, |C'D'|$ und wegen $|AB''| = |AB'| = b$, $|AC'| = c$, $|B''D'| = |B'D'|$ schließlich $|B'D'| \,/\, |D'C'| = b/c$.

Daher ergibt sich für die linke Seite der obigen Gleichung

$$\frac{c - bc/(b+x)}{bc/(b+x)} \cdot \frac{bc/(c+x)}{b - bc/(c+x)} \cdot \frac{b}{c} = \frac{c(b+x) - bc}{bc} \cdot \frac{bc}{b(c+x) - bc} \cdot \frac{b}{c} = \frac{x}{b} \cdot \frac{c}{x} \cdot \frac{b}{c} = 1\,.$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Bemerkung: Den Punkt D der Lösung kann man beispielsweise finden, wenn man den Fall $|BM| = |CN| \longrightarrow \infty$ betrachtet. Dabei geht der Umkreis des Dreiecks AMN in die Außenwinkelhalbierende t über, auf der folglich D liegen muss.

561243 Lösung — *7 Punkte*

Teil a) Nein, Wallenstein kann den Sieg nicht erzwingen. Wenn Wallenstein „teilt“, kann Tilly anschließend eine andere Kompanie so „teilen“, dass eine Kompanie mit genau einem Zinnsoldaten entsteht. Da danach jedes „Herrschen“ zum sofortigen Verlieren des Spiels führt, kann nur noch geteilt werden, die Anzahl von 49 Zinnsoldaten bleibt also erhalten. Nach $40 = 49 - 7 - 2$ weiteren Teilungen bestehen alle Kompanien nur noch aus einem Zinnsoldaten. Der nächste Zug führt also zwangsläufig zum Verlust. Da diesen Zug Wallenstein ausführen muss, verliert er spätestens dann.

Reduziert Wallenstein im ersten Zug jedoch alle Kompanien um einen Zinnsoldaten, so kann Tilly eine beliebige Kompanie von dann sechs Zinnsoldaten in eine von fünf und eine von einem zerlegen. Dann gilt Gleiches wie im ersten Fall, und das Spiel erreicht bereits nach $34 = 7 \cdot 6 - 7 - 1$ Zügen die Situation, dass jede Kompanie nur noch aus einem Zinnsoldaten besteht. Wieder ist dann Wallenstein am Zuge.

Teil b) Für den allgemeinen Fall führen wir neben den Kennzahlen M und N noch die Anzahl $D = N - M$ der überzähligen Zinnsoldaten und $Z = \min\{n_1, n_2, \ldots, n_M\}$, die kleinste Anzahl von Zinnsoldaten einer Kompanie, ein. Der Wert jeder dieser Kennzahlen ändert sich möglicherweise von Zug zu Zug. Die Befehle wirken sich im Einzelnen wie folgt aus:

„Herrsche!“: Wenn $Z > 1$ ist, bleibt M erhalten, N und D vermindern sich jeweils um M und Z um eins. In diesem Fall verläuft der Zug ohne Verlust einer Kompanie. Ist dagegen $Z = 1$, so geht mindestens eine Kompanie verloren, und das Spiel endet.

„Teile!“: M erhöht sich um eins, N bleibt erhalten und D vermindert sich um eins. Hierbei kann Z erhalten bleiben oder sich verkleinern. „Teile!“ ist nur möglich, wenn $D > 0$ gilt.

Außerdem tauschen Tilly und Wallenstein bei jedem Zug die Rolle des *Anziehenden*, der den nächsten Befehl gibt, und des *Nachziehenden*, der erst danach wieder am Zug ist. Wir nennen eine Situation, in der der Anziehende erzwingen kann, dass der Nachziehende verliert, eine *Gewinnstellung*, jede andere Stellung *Verluststellung*.

Es ist nicht möglich, dass das Spiel unendlich lange dauert. Denn in jedem Zug, der noch keine sofortige Niederlage darstellt, wird D kleiner, und dies kann nur endlich oft geschehen.

Gibt es für den Anziehenden einen Zug, der eine Verluststellung erreicht, so ist die aktuelle Situation eine Gewinnstellung. Führen dagegen alle möglichen Züge zu Gewinnstellungen, so liegt eine Verluststellung vor. Nach diesen Regeln bewerten wir alle möglichen Situationen, wobei sich zunächst einige Fälle unproblematisch überlappen werden.

Fall 1: Es ist $D = 0$.
Dann besteht jede Kompanie aus einem Soldaten. Nur der Befehl „Herrsche!" kann ausgeführt werden und führt zum sofortigen Verlust. Das ist eine *Verluststellung*.

Fall 2: Es ist $Z = 1$.
Es gibt also eine Kompanie, die aus nur einem einzigen Soldaten besteht. Also wird kein Spieler den Befehl „Herrsche!" geben, denn dies würde seine sofortige Niederlage bedeuten. Es werden also beide so lange teilen, bis eine Situation erreicht ist, in der dies nicht mehr möglich ist und derjenige, der damit konfrontiert wird, verliert. Da sich der Wert von D in jedem Zug um genau 1 verringert, gibt es die beiden folgenden Teilfälle:

Fall 2.1: D ist gerade.
Das ist eine *Verluststellung*.

Fall 2.2: D ist ungerade.
Das ist eine *Gewinnstellung*.

Fall 3: Es ist $Z > 1$ und D ungerade.
Dann gibt es eine Kompanie mit $n > 1$ Zinnsoldaten, die im Verhältnis $(n - 1) : 1$ aufgeteilt werden kann. Danach liegt Fall 2.1 für den Nachziehenden vor. Wir haben also eine *Gewinnstellung*.

Fall 4: Es ist $Z > 1$, D gerade und M ungerade.
Dann vermindert sich bei „Teile!" D um eins, bei „Herrsche!" um M, wird also jeweils ungerade. Nach Fall 3 oder, falls sich Z dabei auf 1 vermindert, Fall 2.2 ist dies also eine *Verluststellung*.

Fall 5: Es ist $Z > 1$, D gerade und M gerade.
Wie im Fall 4 führt „Teile!" auf Fall 3 oder Fall 2.2, also zum Verlust für den Anziehenden, der folglich „Herrsche!" befehlen muss. Dann bleibt M erhalten, und D bleibt gerade. Dabei vermindert sich Z um eins. Sofern danach immer noch $Z > 1$ gilt, ist damit für den Nachziehenden erneut die Situation von Fall 5 hergestellt, ansonsten die Situation von Fall 2.1. Solange $Z > 1$ gilt, wird also abwechselnd der Befehl „Herrsche!" erteilt. Wer den Fall $Z = 1$ erzeugt, hat gewonnen. Es gibt also zwei Teilfälle:

Fall 5.1: Es sind D, M und Z gerade.
Das ist eine *Gewinnstellung*.

Fall 5.2: Es sind D und M gerade, Z ungerade.
Das ist eine *Verluststellung*.

Damit sind alle Fälle erfasst. Zusammenfassend heißt das:

Wallenstein verliert genau dann, wenn entweder D gerade und M ungerade ist oder D gerade, M gerade und Z ungerade. Dies ist gleichbedeutend dazu, dass entweder N und M ungerade sind oder N und M gerade und Z ungerade.

Resultat: Wallenstein verliert genau dann, wenn eine ungerade Anzahl von Zinnsoldaten auf eine ungerade Anzahl von Kompanien aufgeteilt worden ist oder wenn bei einer geraden Anzahl von Zinnsoldaten und einer geraden Anzahl von Kompanien die kleinste Kompaniestärke ungerade ist. In jedem anderen Fall kann Wallenstein den Sieg erzwingen.

Bemerkung: Natürlich reicht es aus, Teil b) zu lösen und festzustellen, dass Teil a) eine Verluststellung darstellt.