Olympiadeklassen
9 – 10

57. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Jahrgangsrunden 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

571011

Bernd und Inge spielen folgendes Spiel:

Zu Beginn liegt ein Stapel Karten auf dem Tisch, der mindestens drei Karten enthält.

Die beiden sind abwechselnd am Zug.

Im ersten Zug teilt Bernd den Stapel in zwei kleinere Stapel auf. Es sind nur Stapel mit mindestens einer Karte zugelassen.

Jeder folgende Zug besteht aus zwei Teilen. Zunächst ist ein Stapel zu entfernen. Danach ist der andere in zwei kleinere Stapel zu zerlegen. Am Ende eines Zuges liegen also stets genau zwei Stapel auf dem Tisch.

Damit ein Zug möglich ist, muss wenigstens einer der Stapel auf dem Tisch mehr als eine Karte aufweisen.

Gewonnen hat, wer den letzten (möglichen bzw. gültigen) Zug machen konnte.

a) Der (Start-)Stapel enthält genau vier Karten. Wie kann Bernd gewinnen? Besteht die Möglichkeit, dass Inge gewinnt?
b) Für welche Größen des Startstapels (bzw. für welche Anzahl der Karten im Startstapel) kann Bernd den Gewinn erzwingen, für welche Größen gelingt dies Inge?

571012

Für ganze Zahlen m und n gelte $(n^2 + n) \cdot (m^2 - 1) = 240$.

Bestimmen Sie unter Beachtung aller Lösungsmöglichkeiten den kleinsten und den größten Wert der Differenz $n - m$.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

571013

Es gibt positive ganze Zahlen n, also $n > 0$, für die sowohl n als auch deren Quersumme $Q(n)$ durch 57 teilbar ist. Solche Zahlen n werden in dieser Aufgabe betrachtet.

a) Geben Sie zwei Beispiele für solche Zahlen n an und weisen Sie nach, dass diese Zahlen die gestellten Bedingungen erfüllen.

b) Ermitteln Sie die kleinste Zahl n mit dieser Eigenschaft und weisen Sie nach, dass sie die gestellten Bedingungen erfüllt.

571014

Gegeben sind die beiden Funktionen a und b mit den Gleichungen $a(x) = -2\,|x| + 11$ und $b(x) = \frac{1}{2}\,|x - 7|$.

a) Stellen Sie die Graphen der Funktionen a und b in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar.

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen von a und b.

c) Der Punkt C sei der Schnittpunkt des Graphen der Funktion a mit der y-Achse. Beweisen Sie, dass der Punkt C und zwei der Schnittpunkte der Graphen von a und b ein rechtwinkliges Dreieck bestimmen.

571015

Gegeben sei ein (nicht überschlagenes) Viereck $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, $|AD| = |DC| = |CB|$ und $|DB| = |BA| = |AC|$.

Bestimmen Sie die Größen der Innenwinkel dieses Vierecks.

571016

In der Ebene sind zwei Punkte A und B mit dem Abstand $|AB| = 7$ gegeben; außerdem seien x und y positive reelle Zahlen.

Gesucht sind alle Punkte P, für die $|PA|$ eine der Zahlen 5, x und y ist und gleichzeitig $|PB|$ eine der Zahlen 5, x und y ist. (Es ist also auch erlaubt, für beide Strecken eine gleiche Länge zu wählen.)

a) Wie viele solche Punkte P gibt es für $x = 4$ und $y = 12$?

b) Bestimmen Sie die Menge M aller derjenigen Paare (x, y), für die es genau 18 solche Punkte P gibt.
Skizzieren Sie M in einem rechtwinkligen Koordinatensystem.