Konstruktion des regelmäßigen 17-Ecks

Dr. Winter, Gymnasium Engelsdorf (2003-2005, 2. Version)

oder wie stellt
man eine Strecke der Länge

$$x = \frac{1}{16}\left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\right)$$

dar?

Der Konstruierbarkeit regelmäßiger n-Ecke

mit Zirkel und Lineal*

liegt folgender von Carl Friedrich GAUSS

bewiesener Satz zugrunde:

„Die Konstruierbarkeit des regelmäßigen p-Ecks (p Primzahl) ist mit Zirkel und Lineal **genau dann** ausführbar, **wenn** p die Form $p=2^{n} + 1$ hat. (n natürliche Zahl, n>0) “

---

*Ein solches Lineal hat keine Messfunktion, es dient jediglich dem Zeichnen von Geraden, Strahlen oder der Verbindung zweier Punkte durch eine Strecke.

Also z.B.:

n=1 à p=3

n=2 à p=5

n=3 à p keine Primzahl

n=4 à p=17 (GAUSS 1796)

n=5 à p keine Primzahl

n=6 à p keine Primzahl

n=7 à p keine Primzahl

n=8 à p=257 (80 Seiten Konstruktions-beschreibung)

. . .

n=16 à p=65537 (in Göttingen: Handkoffer)

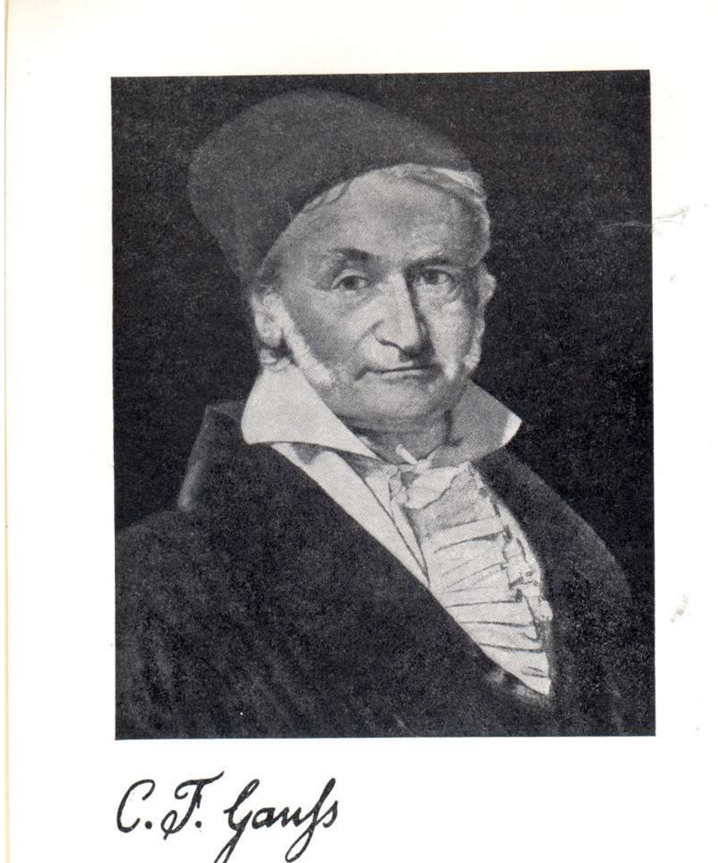
Carl Friedrich GAUSS

(* 4. Mai 1777 - †23. Februar 1855)

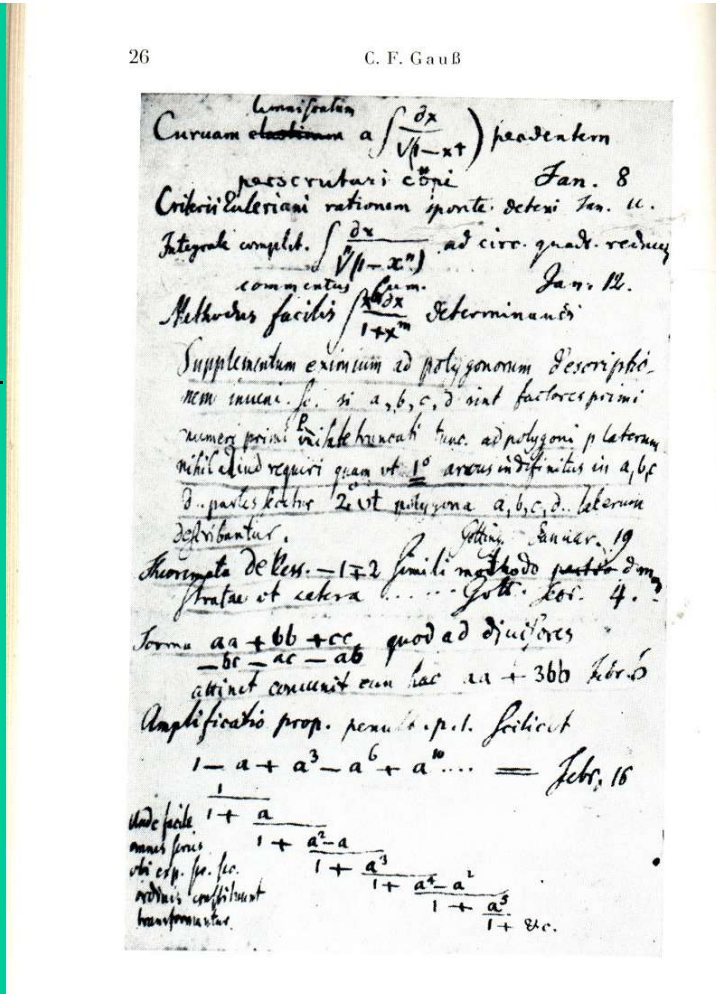
fand (nach etwa 2000 Jahren vergeblichen Mühens) den Beweis für die Konstruierbarkeit des 17-Ecks am 29. März 1796, also mit 19 Jahren.

Dieser Tag war für sein Leben entscheidend; er entschied sich Mathematik statt klassische Philologie zu studieren.

Ab dem nächsten Tag führte er über fast zwei Jahrzehnte ein mathematisches Tagebuch.



Carl Friedrich GAUSS



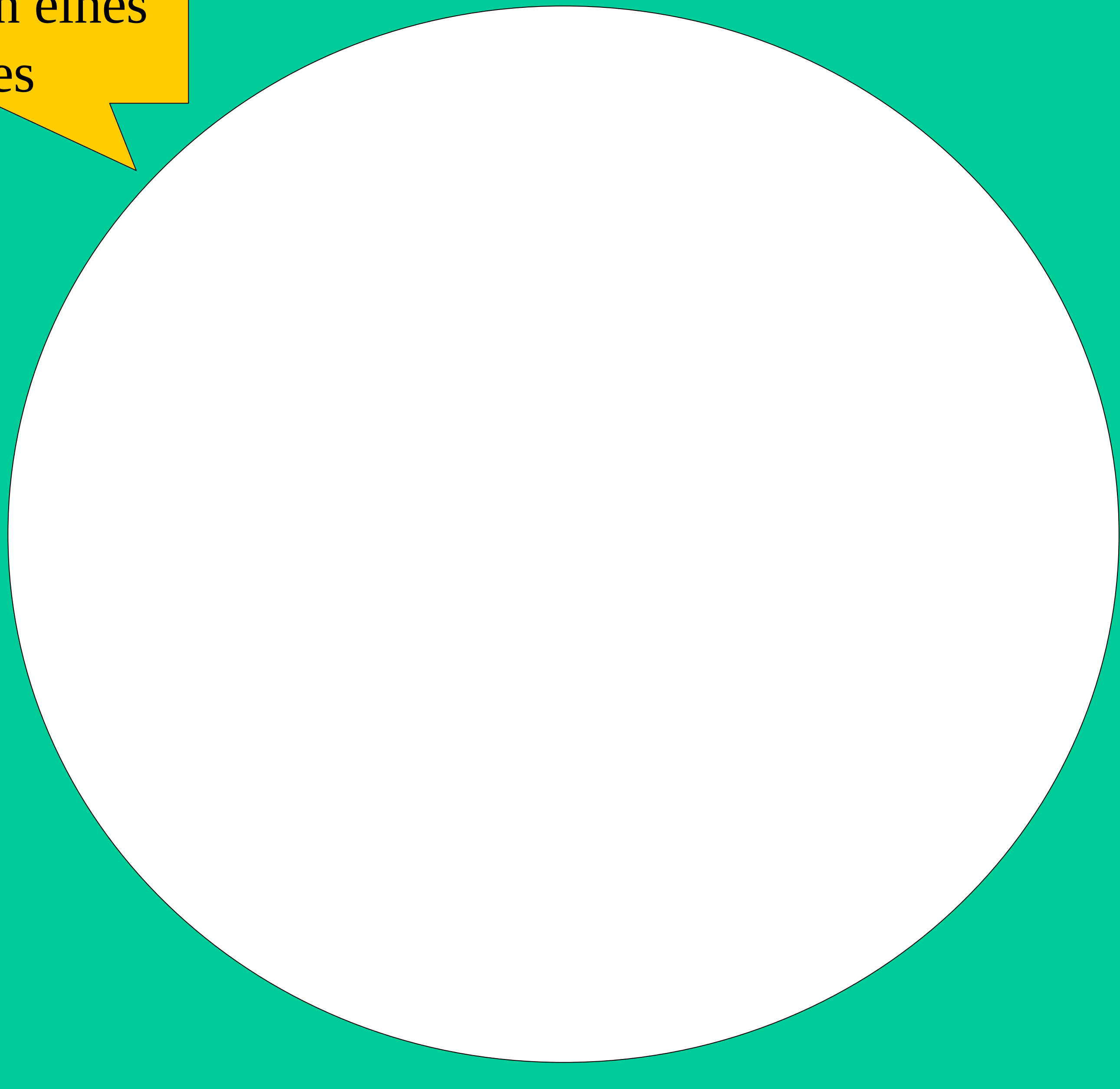
eine Seite seines math. Tagebuchs

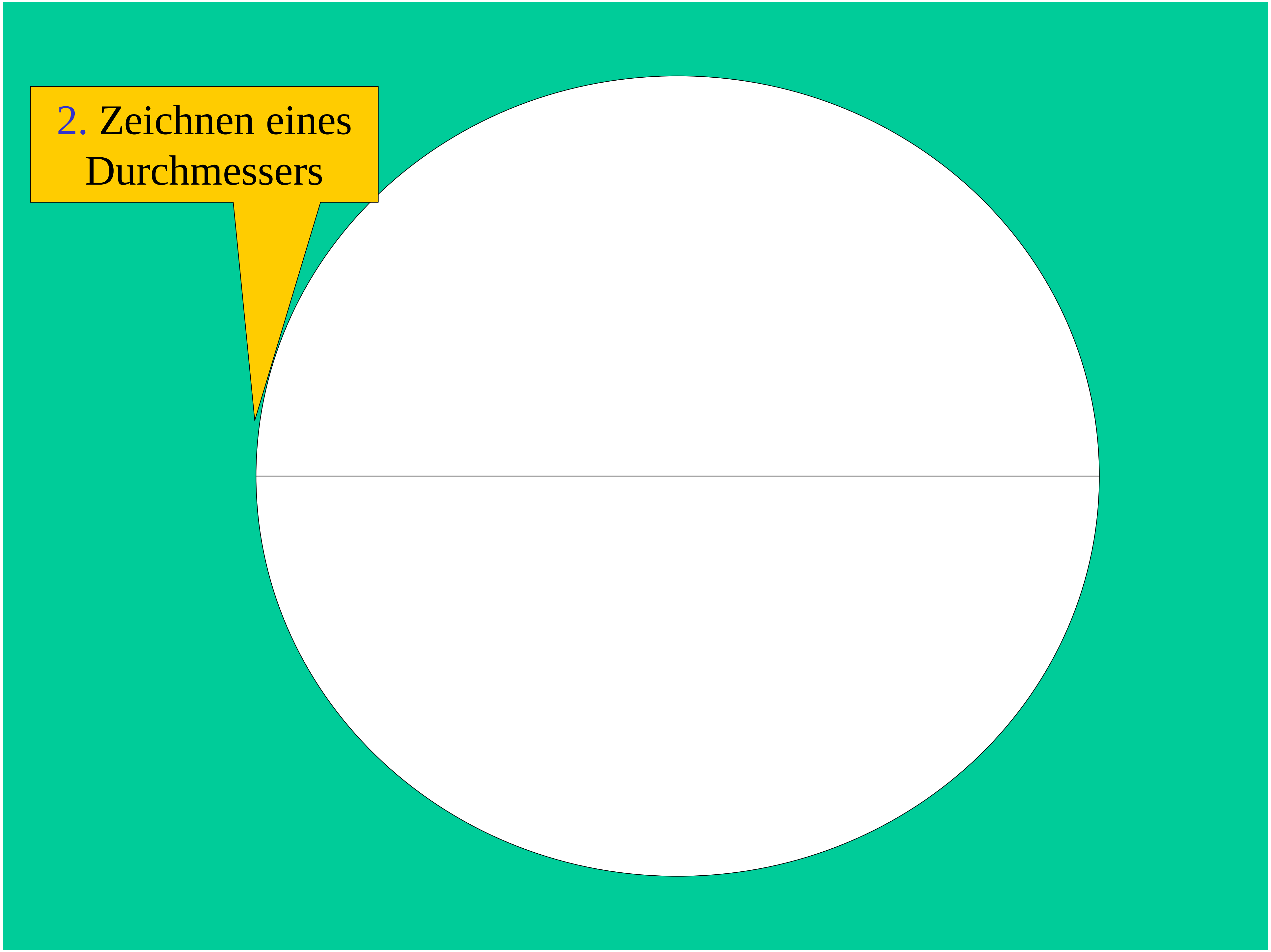
ein 10-DM-Schein

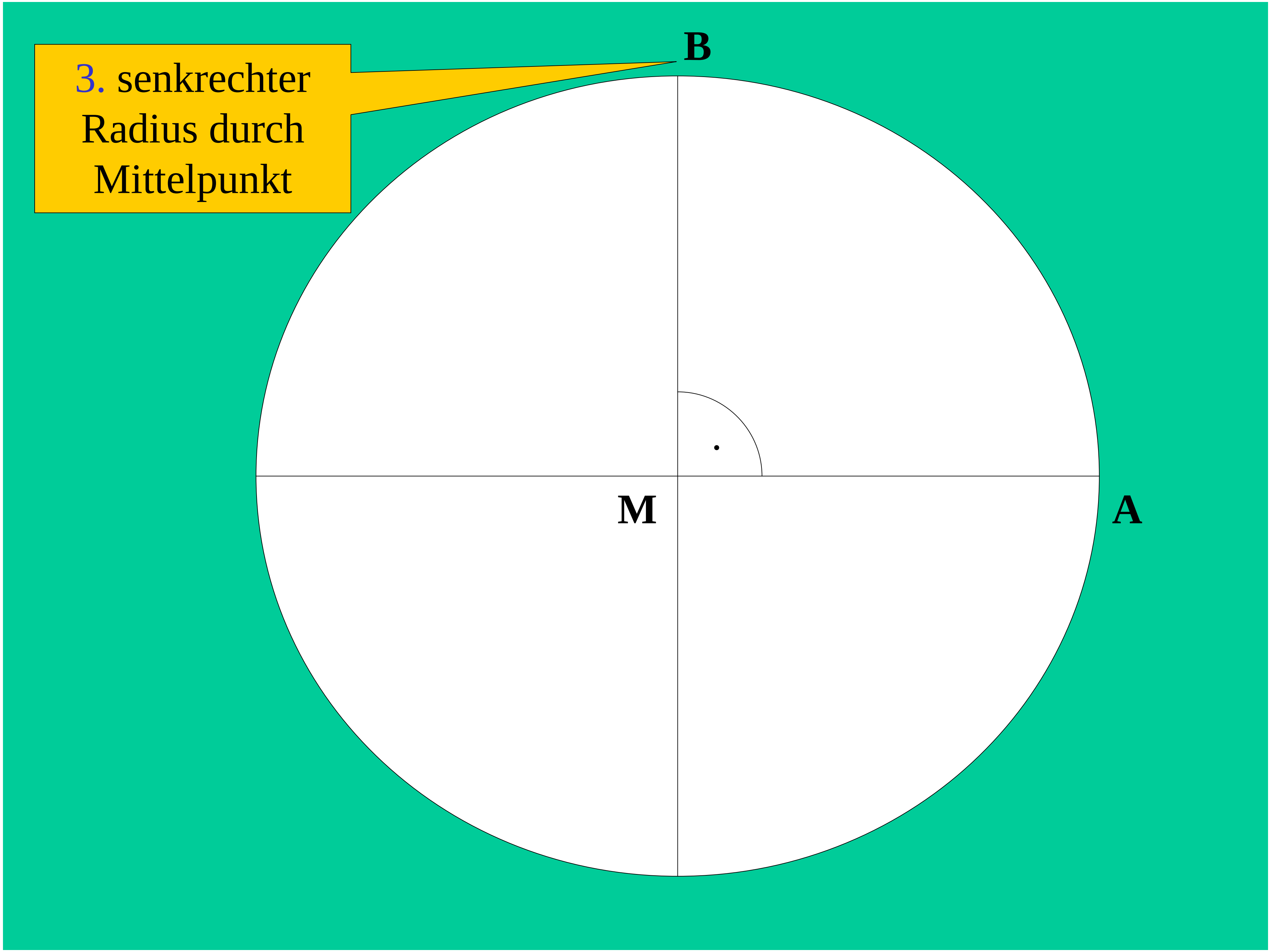
Die folgenden graphischen Darstellungen sollen die Konstruktionsbeschreibung verdeutlichen.

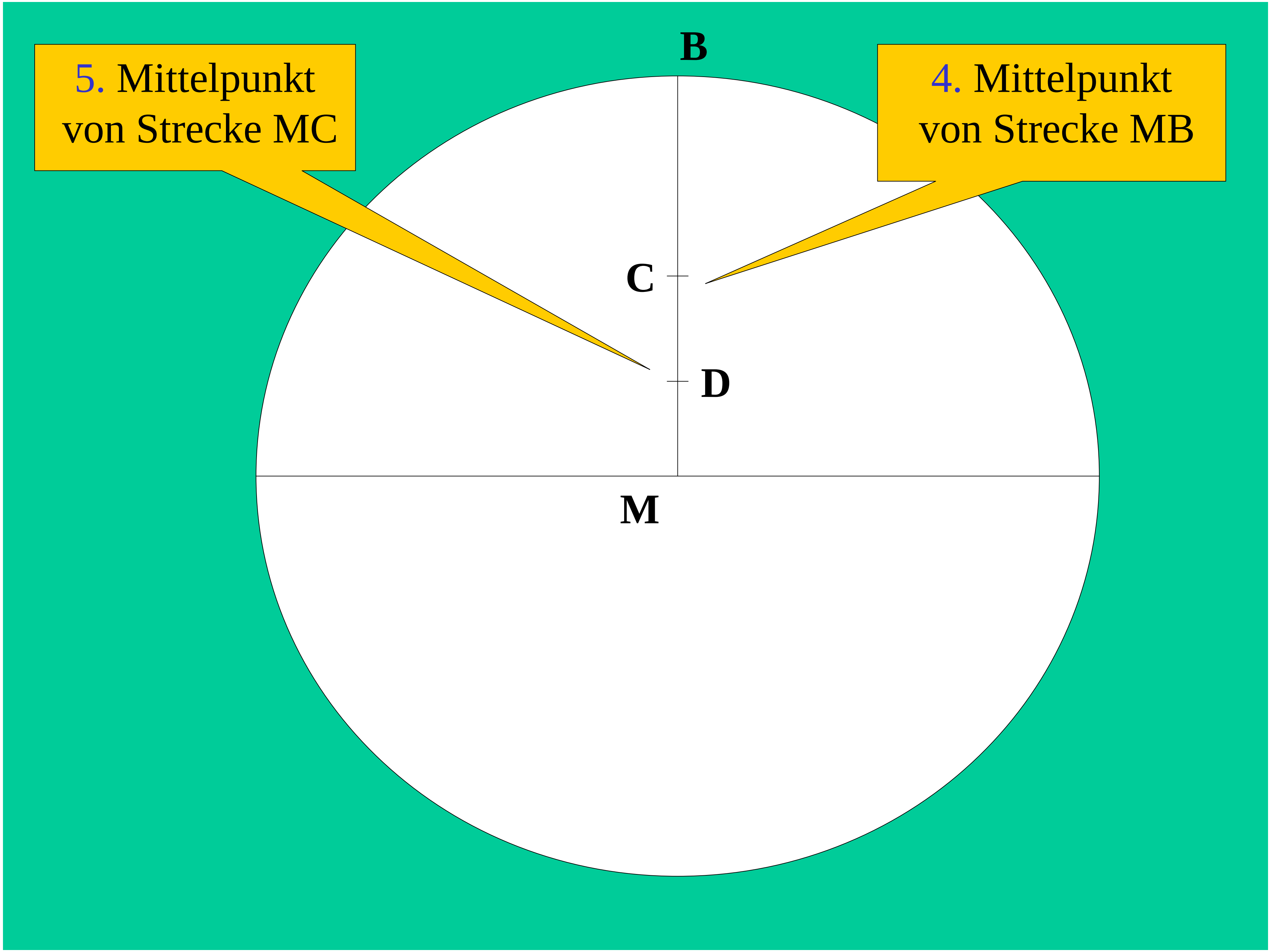
Das bedeutet, dass sie teilweise nur Nähe-rungen sind.

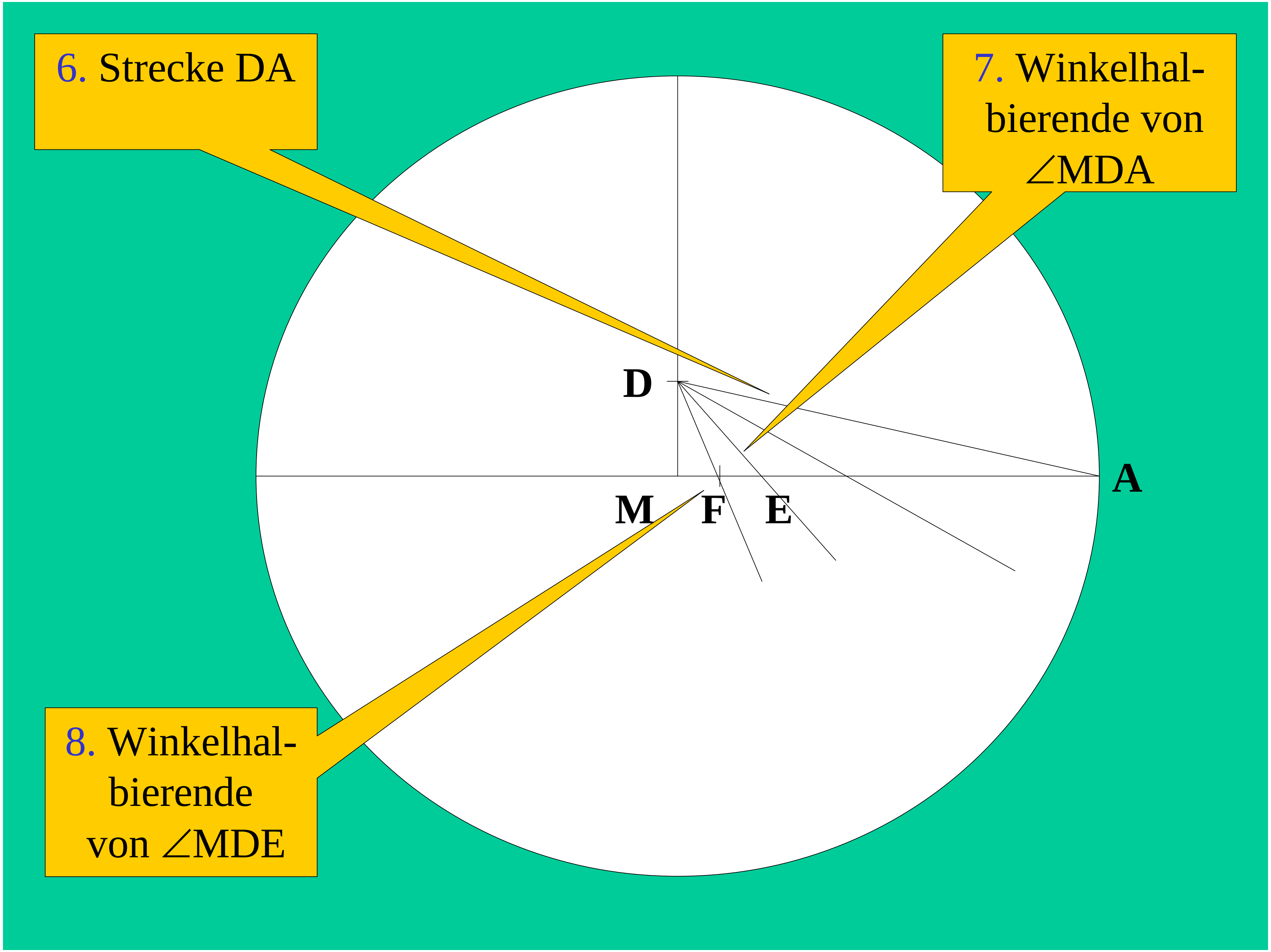
1. Zeichnen eines Kreises



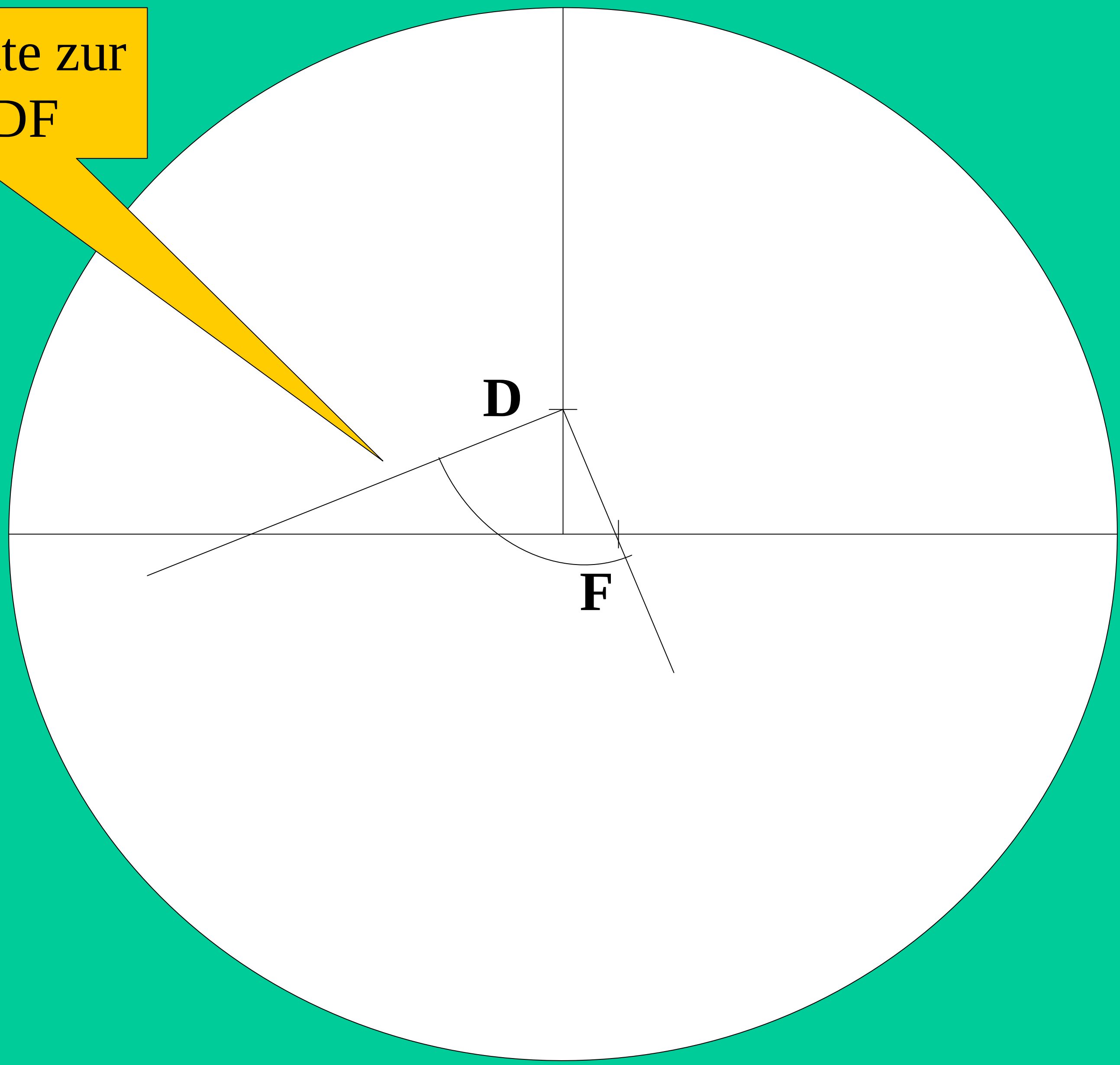

2. Zeichnen eines Durchmessers

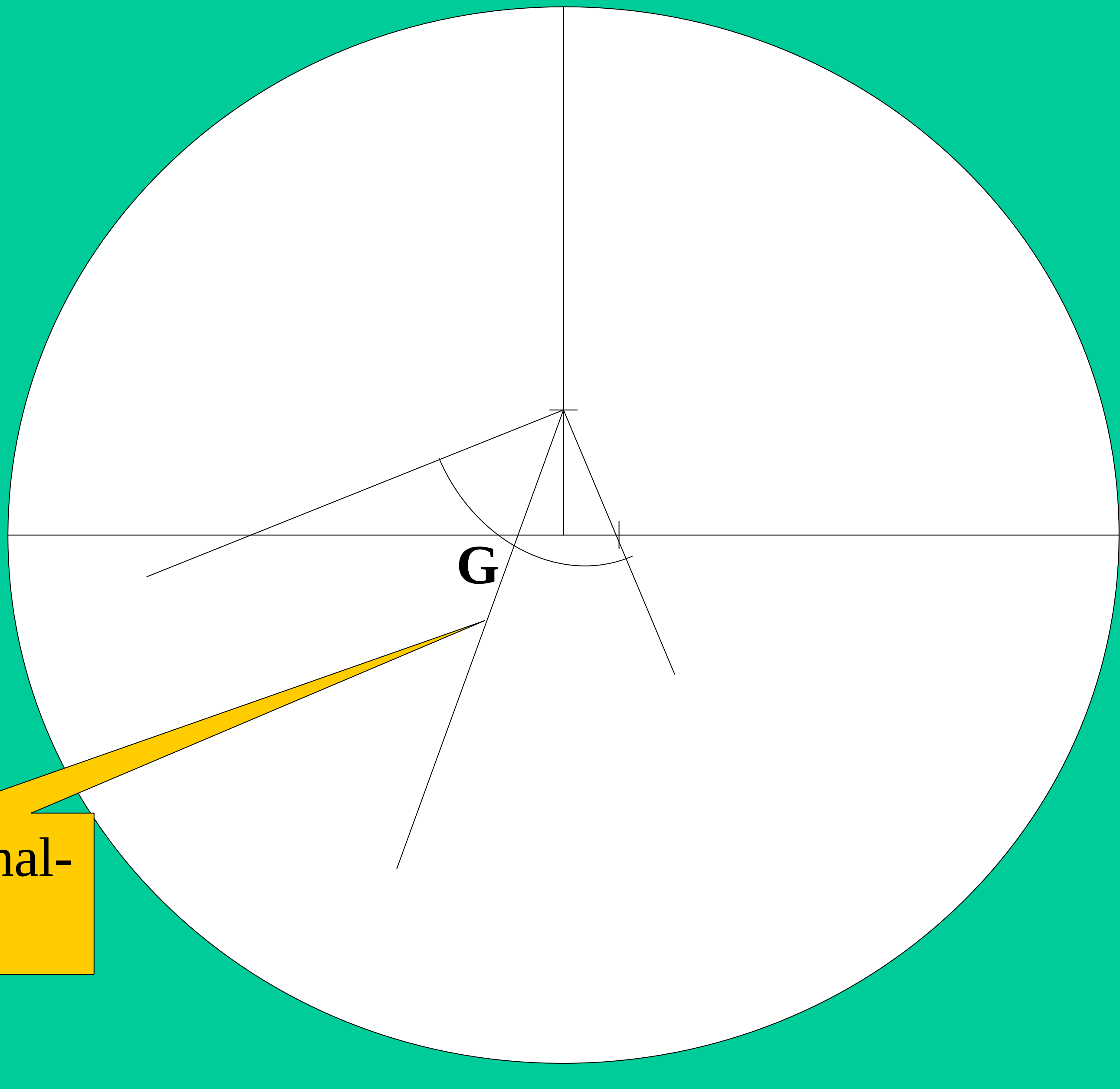

3. senkrechter Radius durch Mittelpunkt
B
M
A


B
5. Mittelpunkt von Strecke MC
4. Mittelpunkt von Strecke MB
C
D
M

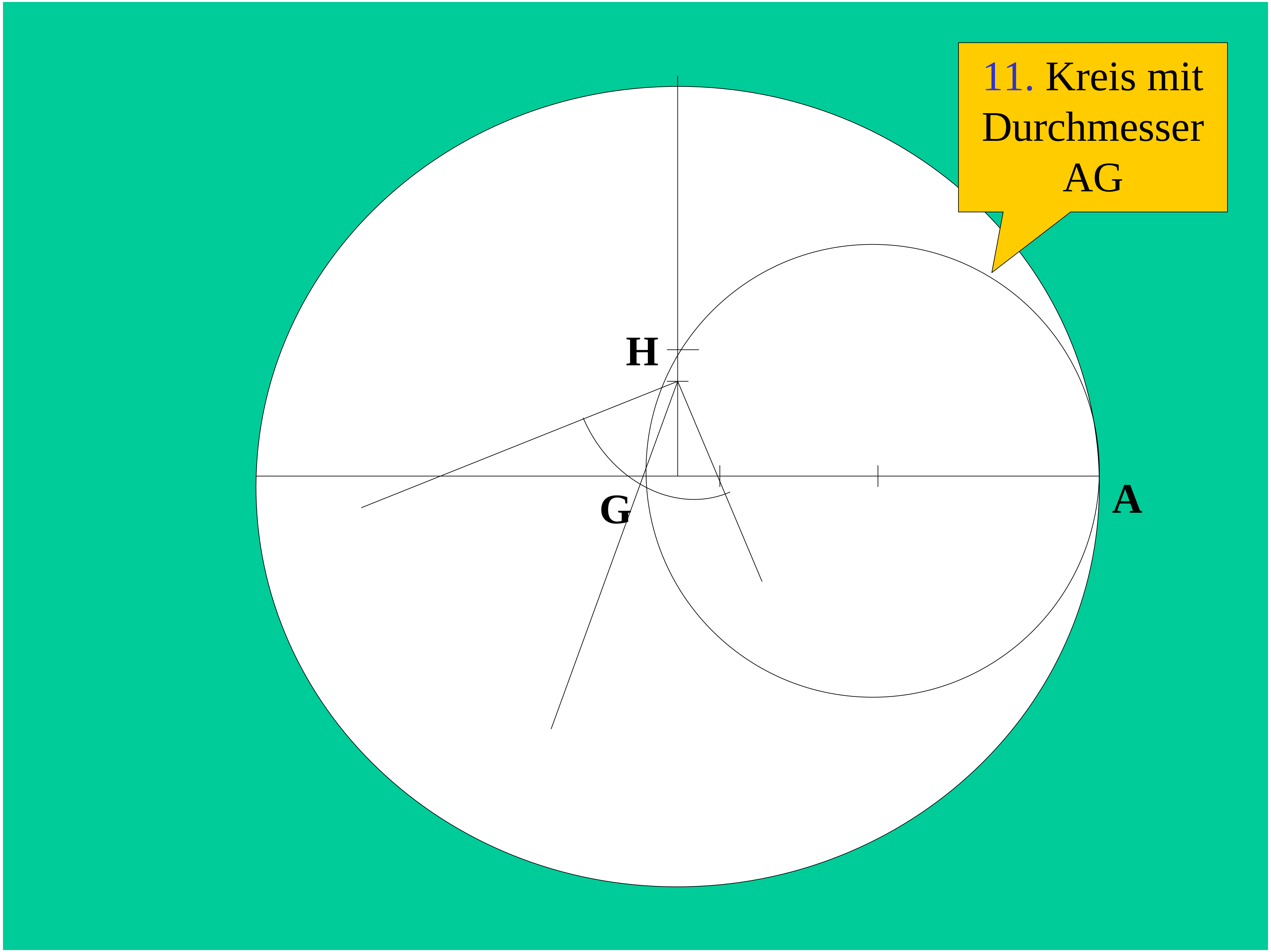

6. Strecke DA
7. Winkelhal-bierende von ∠MDA
8. Winkelhal-bierende von ∠MDE
D
A
M
F
E

9. Senkrechte zur Strecke DF

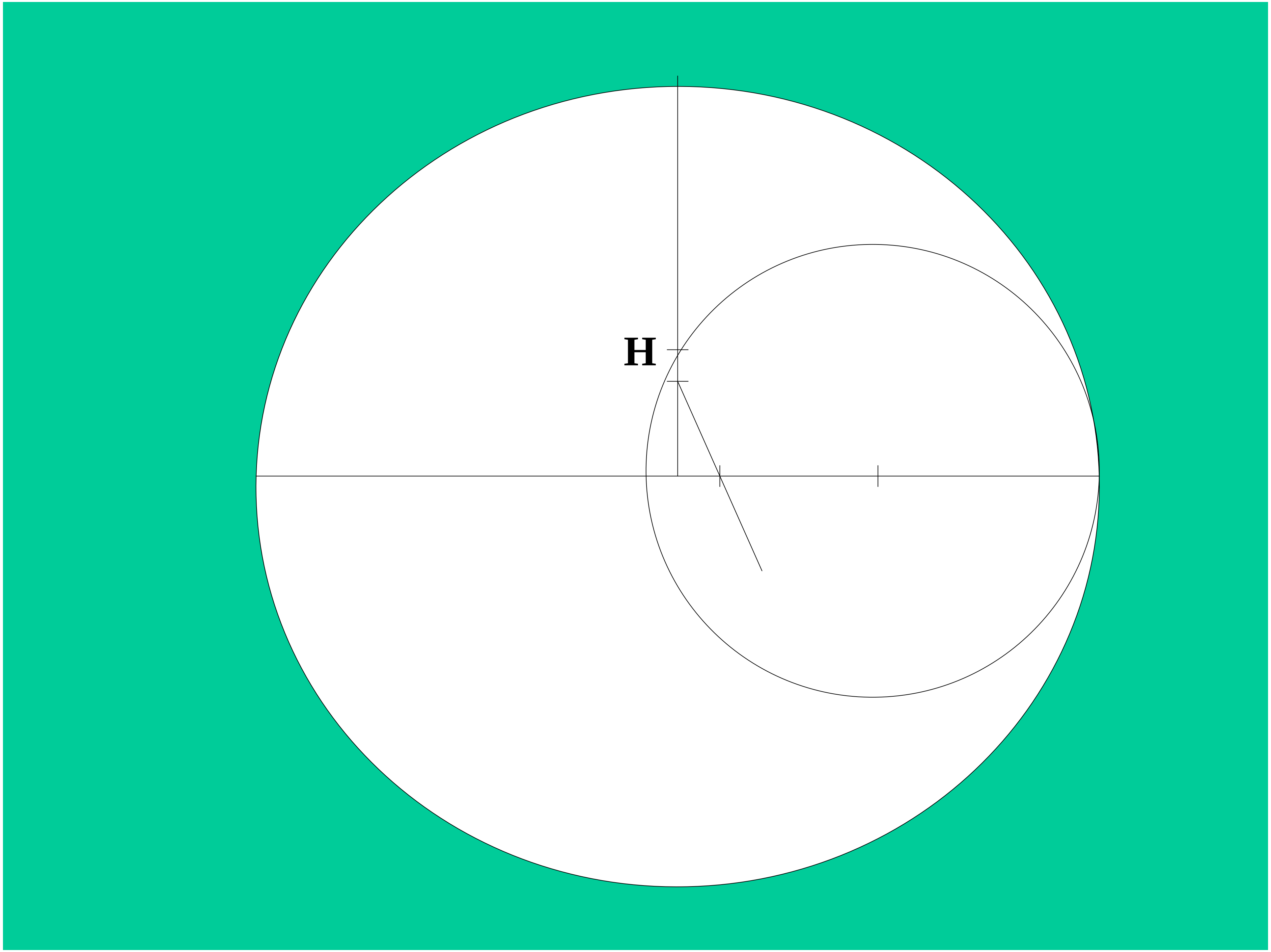


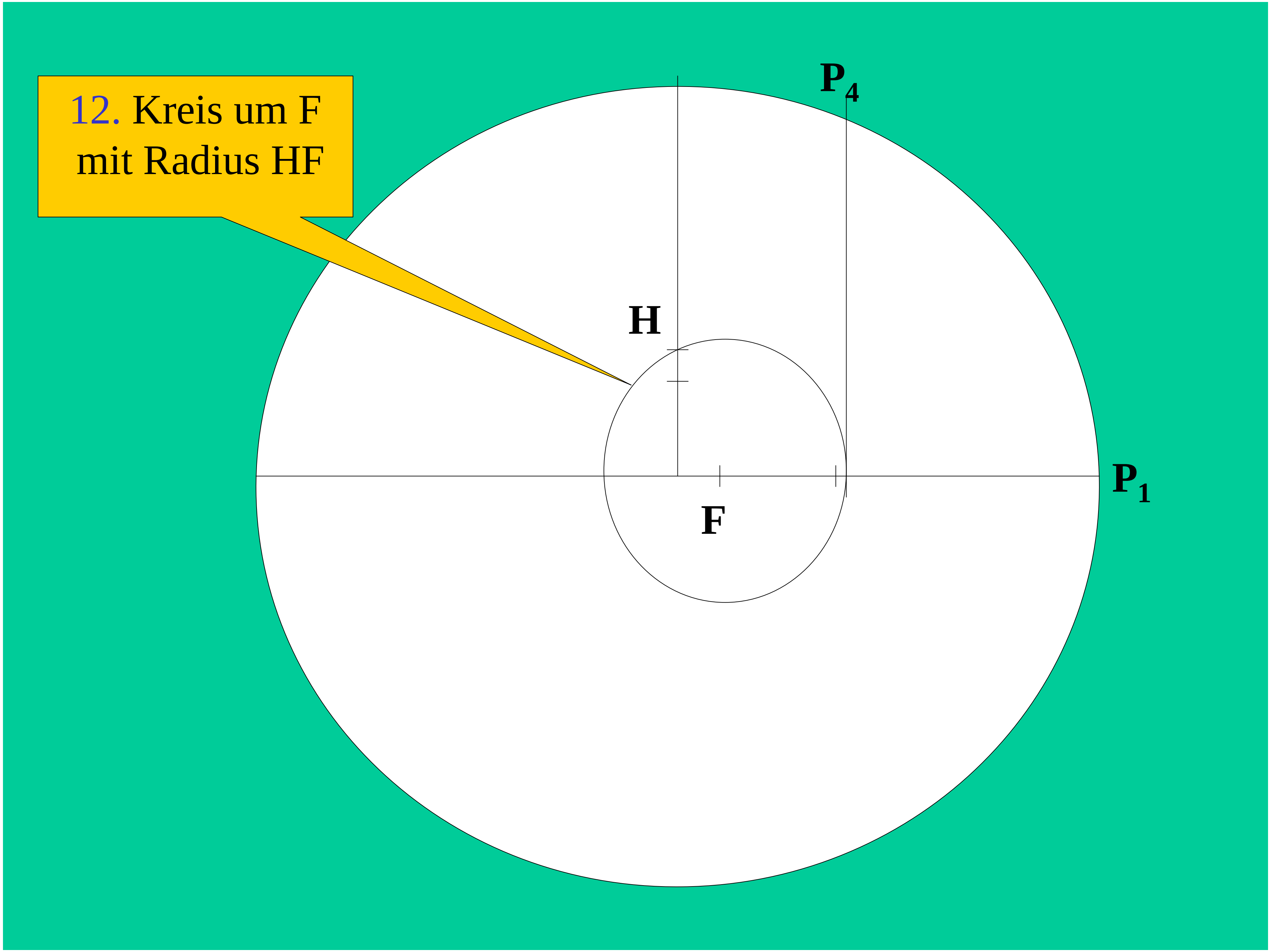


10. Winkelhal-
bierende

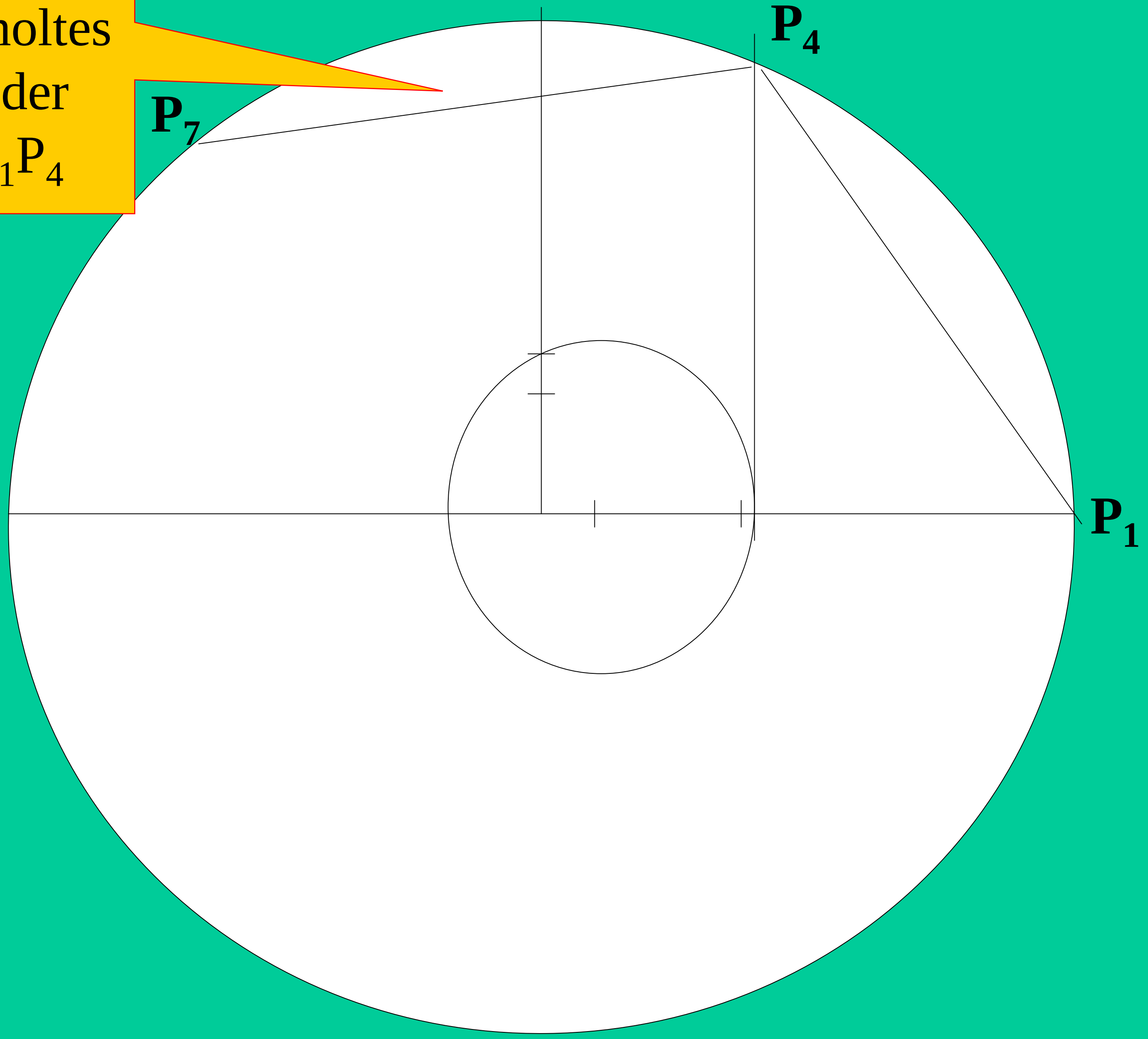


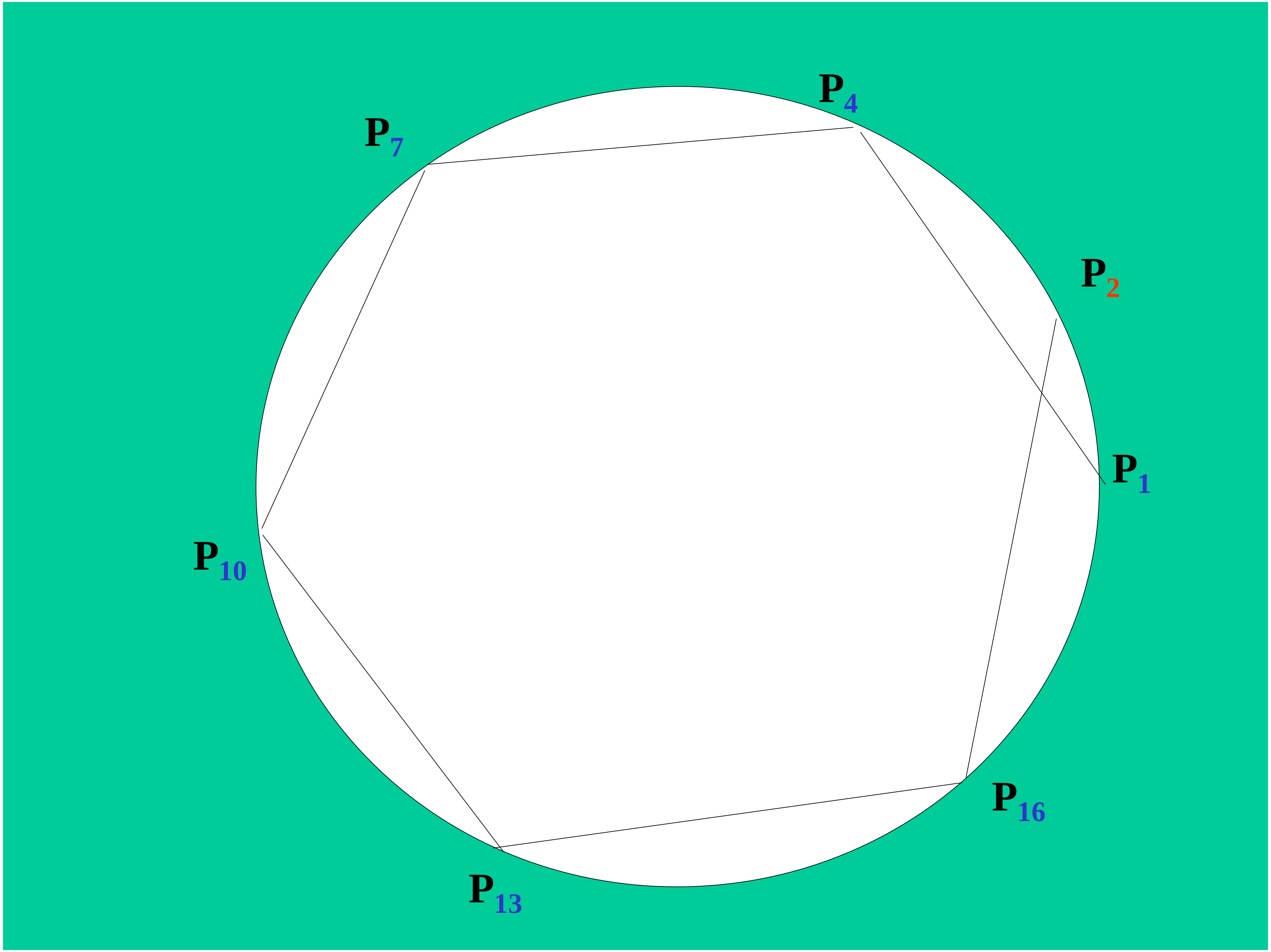
11. Kreis mit Durchmesser AG
H
G
A


H

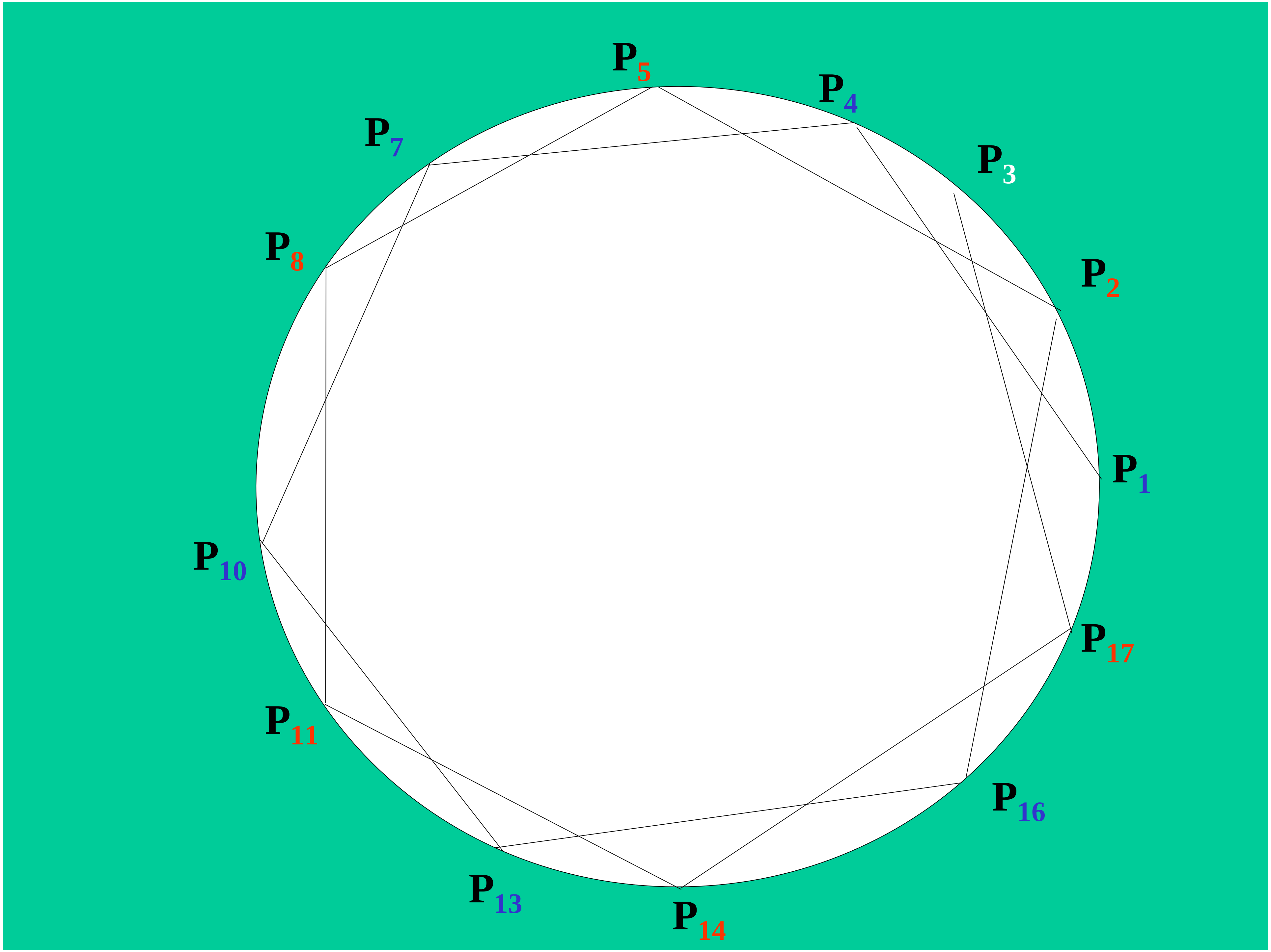

12. Kreis um F
mit Radius HF
P4
H
P1
F

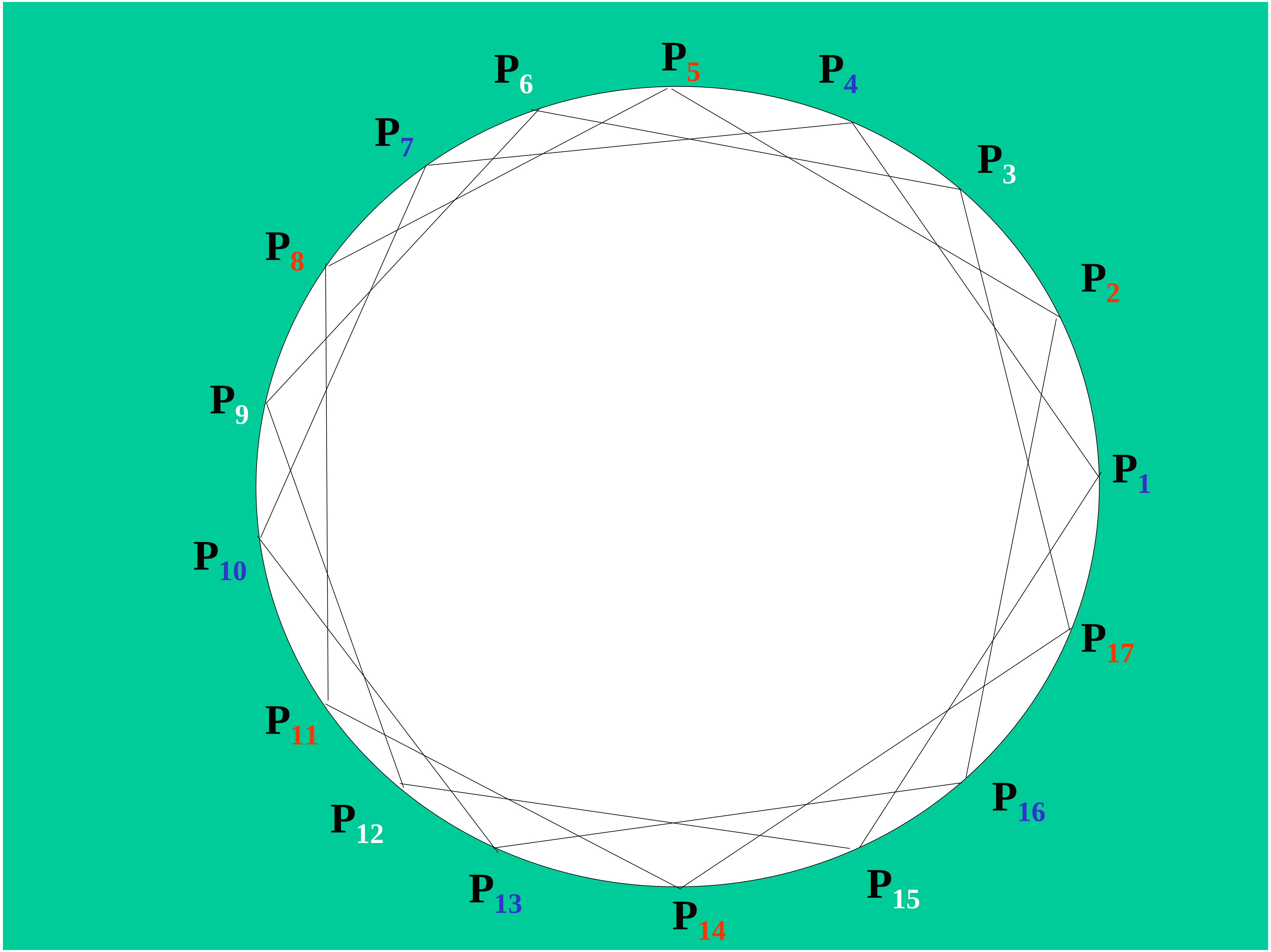
13. wiederholtes Abtragen der Strecke P_1P_4



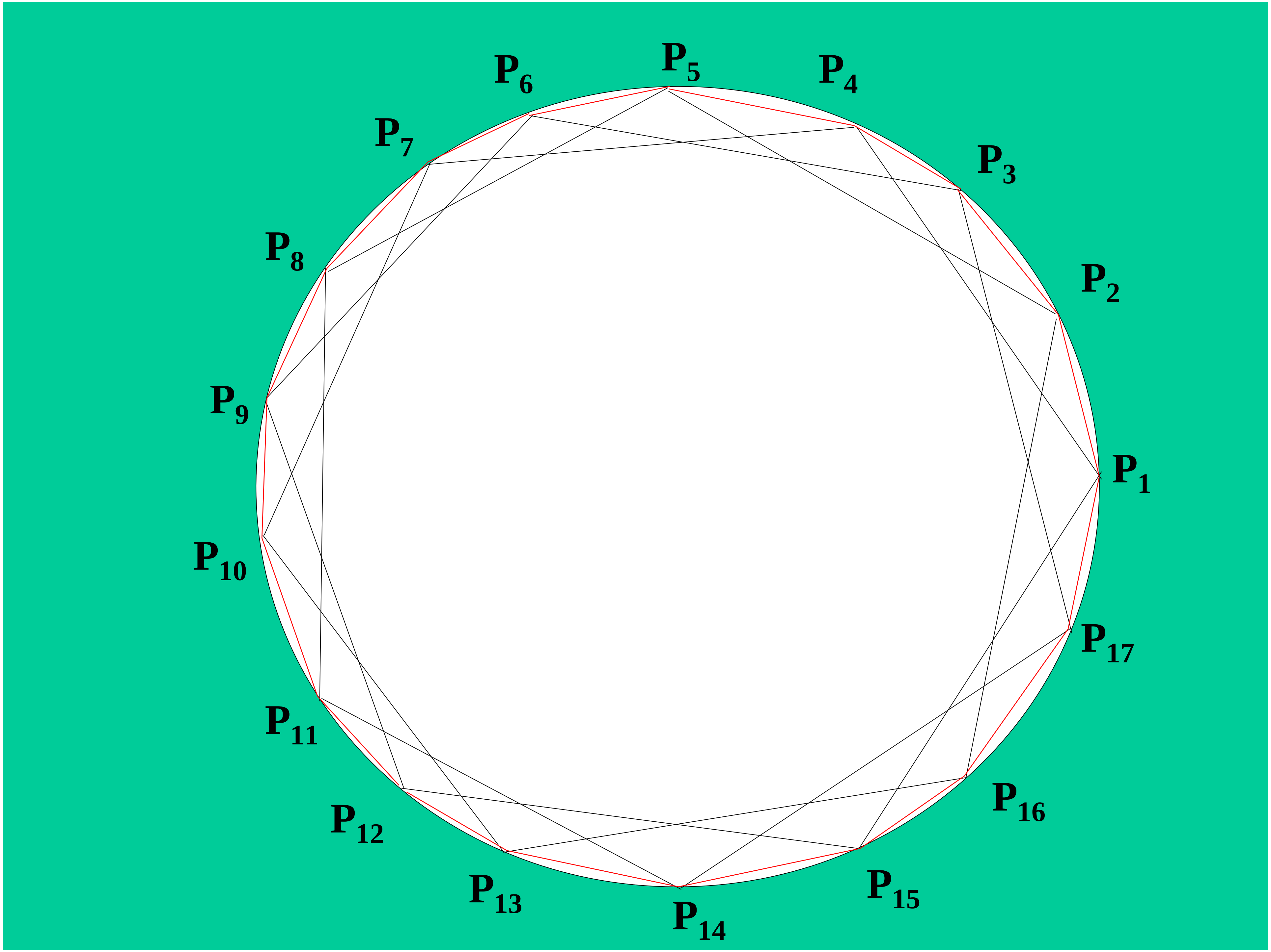


P_4
P_7
P_2
P_1
P_{10}
P_{16}
P_{13}

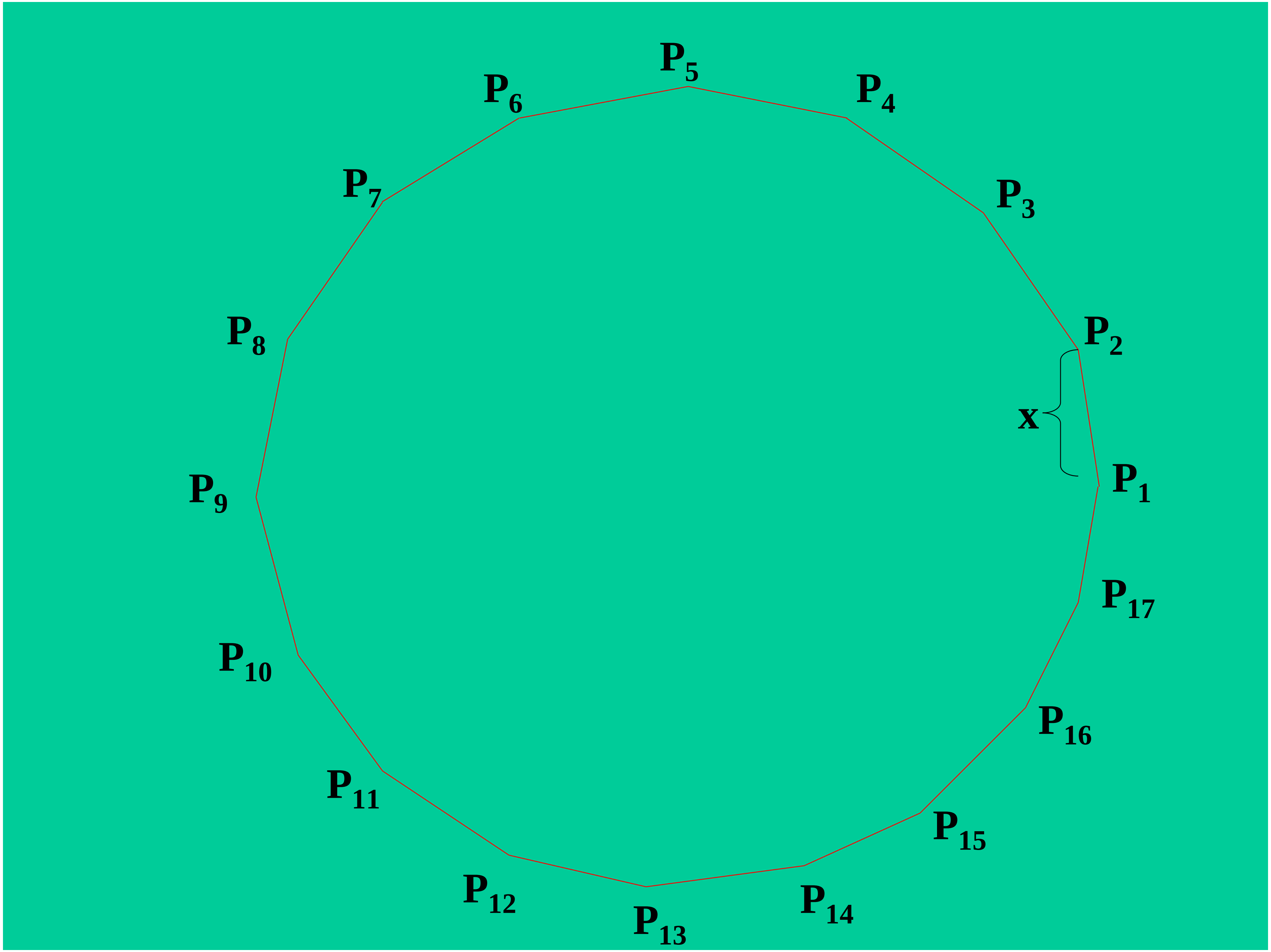

P_5
P_4
P_7
P_3
P_8
P_2
P_1
P_{10}
P_{17}
P_{11}
P_{16}
P_{13}
P_{14}



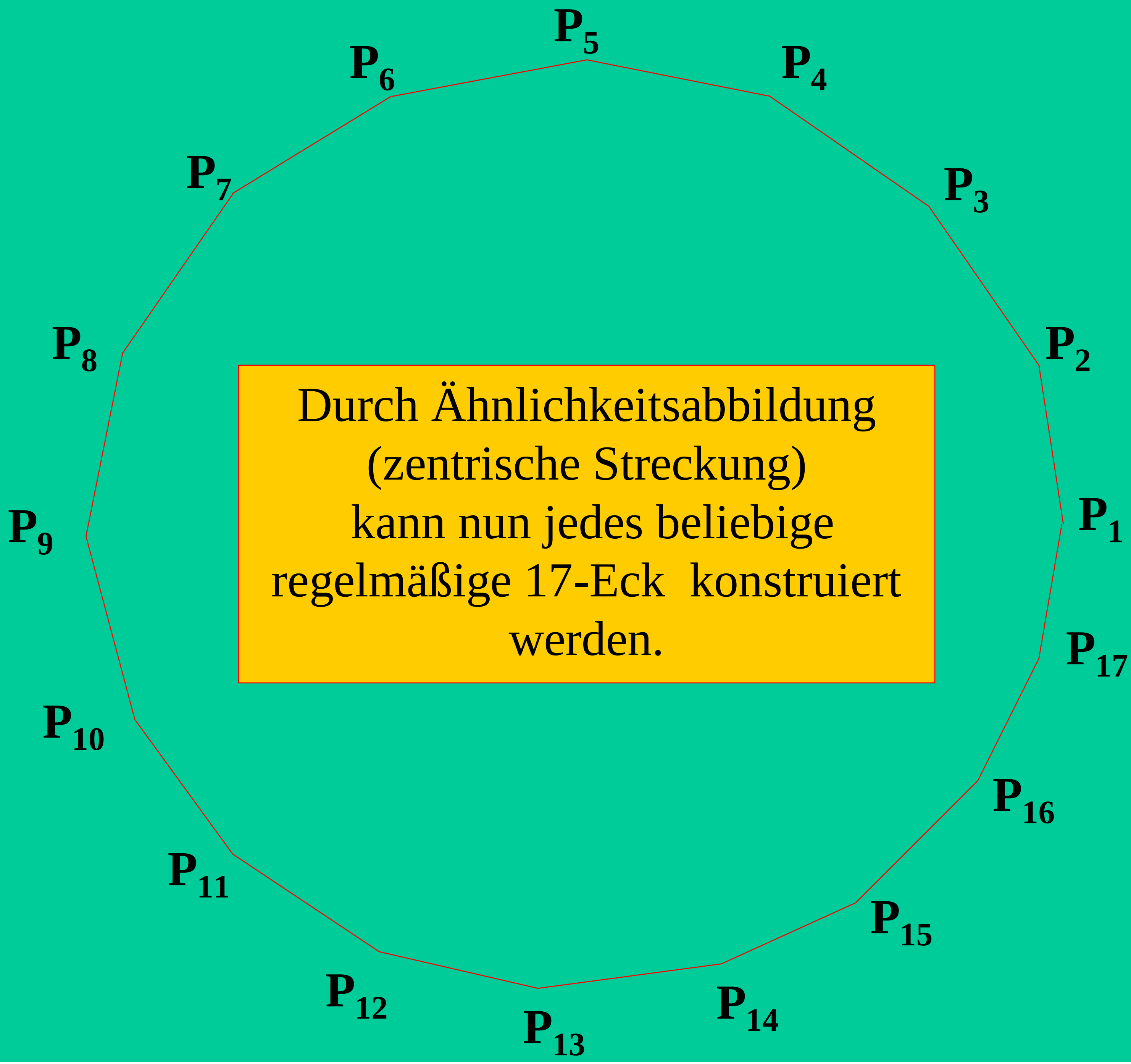
P5
P4
P6
P7
P3
P8
P2
P9
P1
P10
P17
P11
P16
P12
P15
P13
P14



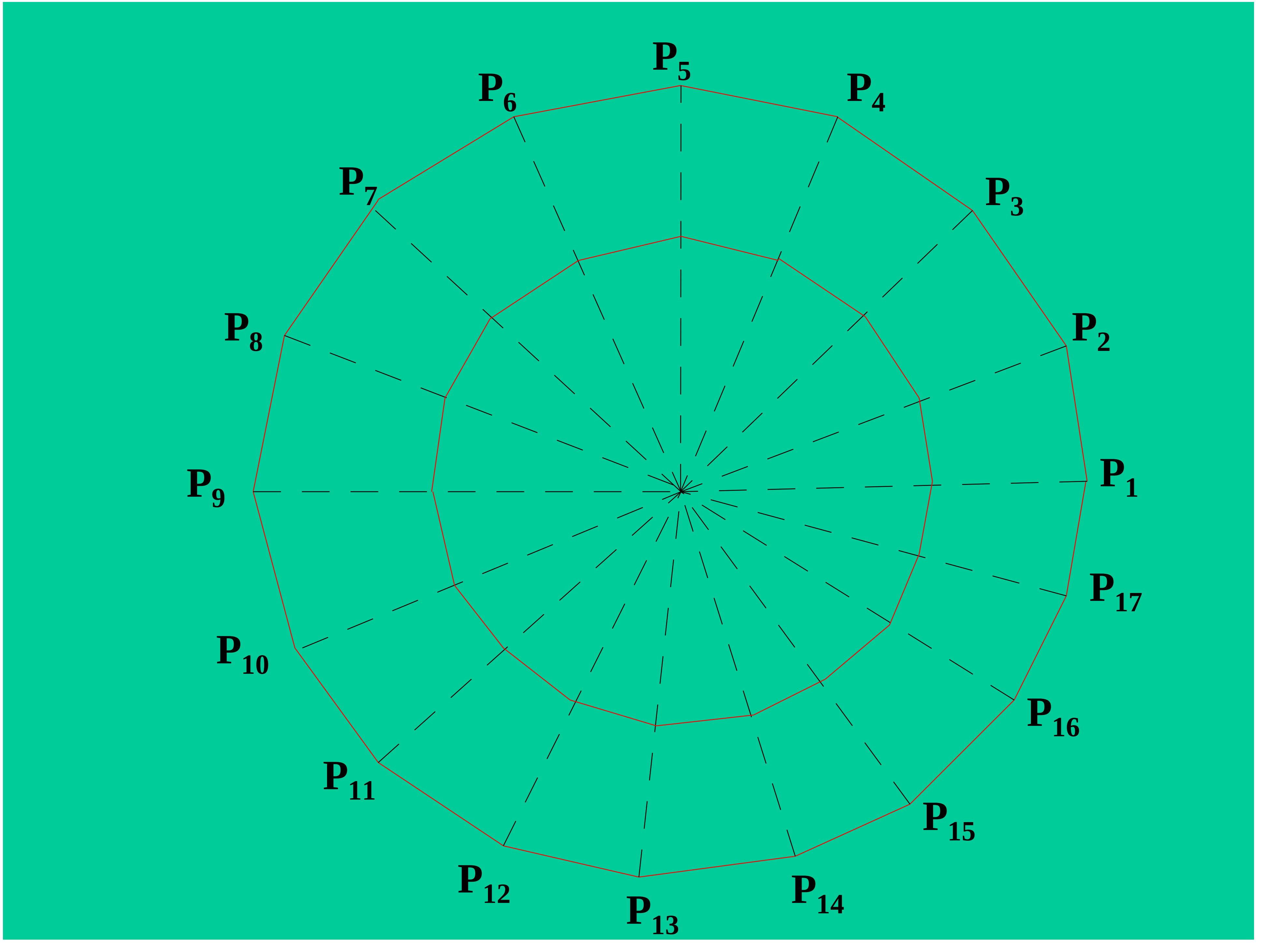
P_5
P_6
P_4
P_7
P_3
P_8
P_2
P_9
P_1
P_{10}
P_{17}
P_{11}
P_{16}
P_{12}
P_{13}
P_{15}
P_{14}



P5
P4
P6
P3
P7
P2
P8
x
P1
P9
P17
P10
P16
P11
P15
P12
P14
P13



Durch Ähnlichkeitsabbildung (zentrische Streckung) kann nun jedes beliebige regelmäßige 17-Eck konstruiert werden.



P5
P6
P4
P7
P3
P8
P2
P9
P1
P17
P10
P16
P11
P15
P12
P14
P13

An dieser Stelle möchte ich Herrn Dr. Timpl vom Max-Planck-Institut für Sonnensystemforschung für seine Hinweise danken.

Während bisher die prinzipielle Konstruktionsbeschreibung angegeben worden ist, sollte man bei der praktischen Ausführung das Auftreten von (unvermeidbaren) Zeichenfehlern beachten und um ihre Minimierung bemüht sein. In dem Sinne sollen Herrn Dr. Timpls Bemerkungen nicht nur an „Fortgeschrittene“ gerichtet sein, sondern auch Anlass zur (selbst)kritischen Beurteilung von (eigenen) Konstruktionen sein.

Er schrieb mir u. a.: „Bei der praktischen Konstruktion des regelmäßigen 17-Ecks ist zur Minimierung des (saldierenden) Zeichenfehlers sinnvollerweise so vorzugehen: Es seien die Strecken $P_1P_4 = X$ und $P_1P_2 = ... = P_9P_{10} = ... = P_{17}P_1 = x$ genannt; beginnend in P_1 wird im positiven Drehsinn drei mal X abgetragen, wodurch ... P_4, P_7, P_{10} entstehen; wiederum in P_1 beginnend, führt dreimaliger X-Abtrag im negativen Drehsinn auf P_{15}, P_{12}, P_9. Mittels wiederholten ‚links-rechts-Abtrags‘ der solcherweise konstruierten Strecke $x = P_9P_{10}$ ergänzt man in P_1, P_4, P_7, P_{12}, P_{15} das 17-Eck um die fehlenden Punkte P_2, P_3, P_5, P_6, P_8, P_{11}, P_{13}, P_{14}, P_{16}, P_{17}.“

Literatur und Quellen:

Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Band 250
C.F.Gauss Mathematisches Tagebuch 1796 – 1814,
Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG,
Leipzig 1976

Wussing, Hans: Biographien hervorragender Natur-
wissenschaftler, Techniker und Mediziner Band 15,
Carl Friedrich Gauss, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft,
Leipzig 1974

Polster, Steffen: Mathematik 2003, Lexikon in der
Software